

Tabla de integrales

Bronshtein y Semendiaev

extraído de “Manual de Matematicas” (editorial Mir) por Rubén Díez Lázaro

Version 0

Integrales de funciones racionales

Integrales que contienen $ax + b$

NOTACIÓN: $X=ax+b$

$$1) \int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}$$

($n \neq -1$; para $n = -1$, véase $n^{\circ}2$).

$$2) \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X$$

$$3) \int xX^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1}$$

($n \neq -1, \neq -2$; para $n = -1, = -2$, véase $n^{\circ}5$ y $n^{\circ}6$).

$$4) \int x^m X^n dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dx$$

(se aplica para $m < n$ o para m entero y n fraccionario; en estos casos $(X-b)^m$ se desarrolla según la fórmula del binomio de Newton ($n \neq -1, \neq -2, \dots$)).

$$5) \int \frac{x dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X$$

$$6) \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X$$

$$7) \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2} \right)$$

$$8) \int \frac{x dx}{X^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}} \right)$$

($n \neq -1, \neq -2$).

$$9) \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right)$$

$$10) \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X^2 - 2b \ln X - \frac{b^2}{X} \right)$$

$$11) \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right)$$

$$12) \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

$(n \neq 1, \neq 2, \neq 3).$

$$13) \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3 \ln X \right)$$

$$14) \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X} \right)$$

$$15) \int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{a^4} \left(X - 3b \ln X - \frac{eb^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2} \right)$$

$$16) \int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{a^4} \left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3} \right)$$

$$17) \int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}} \right]$$

$(n \neq 1, \neq 2, \neq 3, \neq 4).$

$$18) \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}$$

$$19) \int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{ax}{X} \right)$$

$$20) \int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2} \right)$$

$$21) \int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n} \left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \frac{(-a)^i x^i}{iX^i} \right]$$

$(n \geq 1).$

$$22) \int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}$$

$$23) \int \frac{dx}{x^2X^2} = -a \left[\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x} \right]$$

$$24) \int \frac{dx}{x^2X^3} = -a \left[\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x} \right]$$

$$25) \int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}} \left[-\sum_{i=2}^n C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln Xx \right]$$

$(n \geq 1).$

$$26) \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{b^3} \left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2} \right]$$

$$27) \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{b^4} \left[3a^2 \ln Xx + \frac{a^3 x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x} \right]$$

$$28) \int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{b^5} \left[6a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{4a^3 x}{X} - \frac{a^4 x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x} \right]$$

$$29) \int \frac{dx}{x^3 X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}} \left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2 X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2} \ln \frac{X}{x} \right]$$

$(n \geq 3).$

$$30) \int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^i \frac{X^{m-i-1} (-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}$$

(si el denominador del término bajo el signo Σ se anula, entonces tal término se reemplaza por el siguiente: $C_{m+n-2}^{n-1} (-a)^{m-1} \ln \frac{X}{x}$).

Integrales que contienen $ax + b$ y $bf - ag$

NOTACIÓN: $X = ax + b$; $\Delta = bf - ag$

$$31) \int \frac{ax+b}{fx+g} dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2} \ln(fx+g)$$

$$32) \int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b}$$

$(\Delta \neq 0).$

$$33) \int \frac{x dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{g}{f} \ln(fx+g) \right]$$

$(\Delta \neq 0).$

$$34) \int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b} \right)$$

$(\Delta \neq 0).$

Integrales que contienen $a + x$ y $b + x$

$$35) \int \frac{x \, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \frac{a+x}{b+x}$$

$(a \neq b)$.

$$36) \int \frac{x^2 \, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln(a+x) + \frac{b^2 - 2ab}{(b-a)^2} \ln(b+x)$$

$(a \neq b)$.

$$37) \int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} \right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x}$$

$(a \neq b)$.

$$38) \int \frac{x \, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} \right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x}$$

$(a \neq b)$.

$$39) \int \frac{x^2 \, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x} \right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x}$$

$(a \neq b)$.

Integrales que contienen $ax^2 + bx + c$

NOTACIÓN: $X = ax^2 + bx + c$; $\Delta = 4ac - b^2$

$$40) \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$$

$(\text{para } \Delta > 0)$.

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arth} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = -\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}$$

$(\text{para } \Delta < 0)$.

$$41) \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$$

$(\text{Véase N}^\circ 40)$.

$$42) \int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X} \right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X}$$

$(\text{Véase N}^\circ 40)$.

$$43) \int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X}$$

$$44) \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

$$45) \int \frac{x dx}{X^2} = -\frac{bx + 2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

$$46) \int \frac{x dx}{X^n} = -\frac{bx + 2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$$

$$47) \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

$$48) \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

$$49) \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \int \frac{x dx}{X^n}$$

(Véase N° 43 y N° 46).

$$50) \int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2} dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1} dx}{X^n}$$

($m \neq 2n-1$; para $m = 2n-1$ véase N° 51).

$$51) \int \frac{x^{2n-1} dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3} dx}{X^{n-1}} - \frac{x^{2n-3} dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2} dx}{X^n}$$

$$52) \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

$$53) \int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}}$$

$$54) \int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

NOTACIÓN: $X = ax^2 + bx + c$; $\Delta = 4ac - b^2$

$$55) \int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c} \int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$$

$(m > 1)$.

$$56) \int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2 - gbf + g^2a)} \left[f \ln \frac{(fx+g)^2}{X} \right] + \frac{2ga - bf}{2(cf^2 - gbf + g^2a)} \int \frac{dx}{X}$$

(Véase N° 40).

Integrales que contienen $a^2 \pm x^2$

NOTACIÓN: $X = a^2 \pm x^2$; $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} & \text{para el signo “+”} \\ \operatorname{arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo “-” si } |x| < a \\ \operatorname{arcch} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo “-” si } |x| > a \end{cases}$

En el caso de doble signo en la formula el signo de arriba se refiere a $X = a^2 + x^2$ y el de abajo a $X = a^2 - x^2$.

$$57) \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} Y$$

$$58) \int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^3} Y$$

$$59) \int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2 X^2} + \frac{3x}{8a^4 X} + \frac{3}{8a^5} Y$$

$$60) \int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2 X^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{X^n}$$

$$61) \int \frac{x dx}{X} = \pm \frac{1}{2} \ln X$$

$$62) \int \frac{x dx}{X^2} = \mp \frac{1}{2X}$$

$$63) \int \frac{x dx}{X^3} = \mp \frac{1}{4X^2}$$

$$64) \int \frac{x dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nX^n}$$

$(n \neq 0)$.

$$65) \int \frac{x^2 dx}{X} = \pm x \mp aY$$

NOTACIÓN: $X = a^2 \pm x^2$; $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} & \text{para el signo "+"} \\ \operatorname{arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo "-" si } x < a \\ \operatorname{arch} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo "-" si } x > a \end{cases}$

$$66) \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \mp \frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a} Y$$

$$67) \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \mp \frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2 X} \pm \frac{1}{8a^2}$$

$$68) \int \frac{x^2 dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{X^n}$$

$(n \neq 0).$

$$69) \int \frac{x^3 dx}{X} = \pm \frac{x^3}{2} - \frac{a^2}{2} \ln X$$

$$70) \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2} \ln X$$

$$71) \int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^3}{4X^2}$$

$$72) \int \frac{x^3 dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$$

$(n > 1).$

$$73) \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{X}$$

$$74) \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2 X} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}$$

$$75) \int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2 X^2} + \frac{1}{2a^4 X} + \frac{1}{2a^3} \ln \frac{x^2}{X}$$

$$76) \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{a^2 x} \mp \frac{1}{a^3} Y$$

$$77) \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{1}{x^2 X^2} \mp \frac{x}{2a^4 X} \mp \frac{3}{2a^5} Y$$

$$78) \int \frac{dx}{x^2 X^3} = -\frac{1}{a^5 x} \mp \frac{x}{4a^4 X^2} \mp \frac{7x}{8a^6 X} \mp \frac{15}{8a^7} Y$$

$$79) \int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2a^2 x^2} \mp \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{X}$$

$$80) \int \frac{dx}{x^3 X^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} \mp \frac{1}{2a^4 X} \mp \frac{1}{a^6} \ln \frac{x^2}{X}$$

NOTACIÓN: $X = a^2 \pm x^2$; $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} & \text{para el signo "+"} \\ \operatorname{arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo "-" si } x < a \\ \operatorname{arch} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo "-" si } x > a \end{cases}$

$$81) \int \frac{dx}{x^3 X^3} = -\frac{1}{2a^6 x^2} \mp \frac{1}{a^6 X} \mp \frac{1}{4a^4 X^2} \mp \frac{3}{2a^3} \ln \frac{x^2}{X}$$

$$82) \int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2 c^2 \mp b^2} \left[c \ln(b+cx) - \frac{c}{2} \ln X \mp \frac{b}{a} Y \right]$$

Integrales que contienen $a^3 \pm x^3$

NOTACIÓN: $X = a^3 \pm x^3$

En el caso de doble signo en la formula el signo de arriba se refiere a $X = a^3 + x^3$ y el de abajo a $X = a^3 - x^3$.

$$83) \int \frac{dx}{X} = \pm \frac{1}{6a^2} \ln -\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2 \sqrt{e}} \operatorname{arctg} \frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$$