

# Curso de Mecánica Celeste

Rafael Cid Palacios

Revisión del texto: 0.95



# Índice general

<b>I</b>	<b>PROBLEMA DE DOS CUERPOS</b>	<b>5</b>
1.	LEYES DE KEPLER . . . . .	6
2.	LEY DE NEWTON . . . . .	7
3.	ATRACCION DE UNA ESFERA . . . . .	8
4.	PROBLEMAS DE DOS CUERPOS . . . . .	9
5.	TRAYECTORIA RELATIVA. INTEGRAL DE LA ENERGÍA . . . . .	11
6.	RELACIONES Y PROPIEDADES DEL MOVIMIENTO . . . . .	12
7.	LA CONSTANTE DE GRAVITACIÓN Y LA TERCERA LEY DE KEPLER . .	13
8.	MOVIMIENTO CON RESPECTO AL CENTRO DE GRAVEDAD . . . . .	15
9.	LEY HORARIA DE UN MOVIMIENTO KEPLERIANO. CASO PARABÓLICO	16
10.	MOVIMIENTO ELÍPTICO. ANOMALÍAS . . . . .	17
11.	RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE KEPLER . . . . .	18
12.	MOVIMIENTO HIPERBÓLICO . . . . .	19
13.	DIVERSAS FÓRMULAS EN EL MOVIMIENTO ELÍPTICO: ECUACIÓN DE THIELE . . . . .	20
14.	LAS FUNCIONES $F$ Y $G$ EN EL MOVIMIENTO ELÍPTICO . . . . .	21
15.	DESARROLLOS EN SERIE DE LAS FUNCIONES $F$ Y $G$ . . . . .	23
16.	TEOREMA DE LAMBERT . . . . .	24
<b>II</b>	<b>DETERMINACIÓN DE ORBITAS</b>	<b>31</b>
17.	ELEMENTOS ORBITALES . . . . .	32
18.	SISTEMAS DE VERSORES FUNDAMENTALES . . . . .	34
19.	VARIABLES Y CONSTANTES ORBITALES . . . . .	36

20.	DETERMINACIÓN DE UN ÓRBITA POR LOS VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD . . . . .	38
21.	DETERMINACIÓN DE UNA ÓRBITA POR DOS VECTORES DE POSICIÓN. SOLUCIÓN DE GAUSS . . . . .	39
22.	DETERMINACIÓN DE UNA ÓRBITA POR CUATRO DIRECCIONES FOCALAS . . . . .	43
23.	DATOS DE OBSERVACIÓN Y EFEMÉRIDES . . . . .	44
24.	OBTENCIÓN DE UNA ÓRBITA PRELIMINAR CON DATOS ANGULARES. MÉTODO DE LAPLACE. . . . .	47
25.	CÁLCULO DE LOS DETERMINANTES . . . . .	50
26.	MÉTODO DE GAUSS . . . . .	52
27.	ESTUDIO DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL . . . . .	54
28.	MÉTODO DE OLBERS . . . . .	55
29.	OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO . . . . .	57
30.	ÓRBITAS MEJORADAS . . . . .	60
31.	CORRECCIÓN DEFINITIVA DE ÓRBITAS . . . . .	62
<b>APÉNDICES</b>		<b>67</b>
A).	Notas y comentarios del editor . . . . .	68
B).	Registro de cambios . . . . .	68
C).	Erratas detectadas en el original . . . . .	69

# I

## PROBLEMA DE DOS CUERPOS

# 1. LEYES DE KEPLER

Basándose principalmente en las observaciones de Tycho-Brahe, dedujo Kepler las tres leyes que llevan su nombre y que rigen el movimiento de los planetas con respecto al Sol. Dichas leyes pueden enunciarse del siguiente modo:

**Primera ley.-** “Los planetas se mueven en órbitas planas alrededor del Sol, siendo las áreas descritas proporcionales a los tiempos empleados en describirlas”.

Para formular esta ley de modo preciso, consideremos (fig. 1.1) un punto  $A$ , que describe una

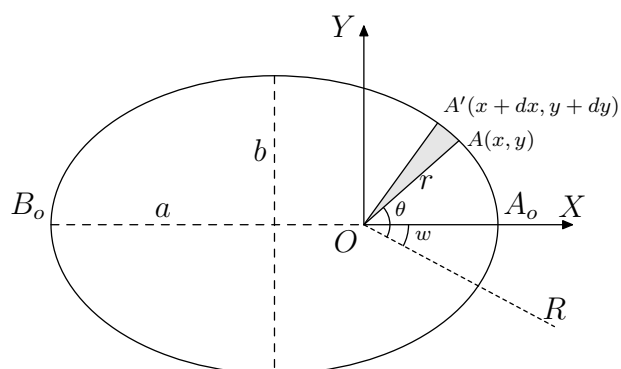


fig. 1.1

órbita plana cualquiera,  $A_oAA'B_o\dots$  y que en el instante  $t$  se encuentra en  $A(x,y)$ . Al cabo de un cierto tiempo  $dt$ , se hallará en la posición  $A'(x+dx,y+dy)$  y el área  $dS$  del triángulo elemental  $OAA'$ , en coordenadas cartesianas y polares será

$$dS = \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (1.1)$$

Según esto, la primera ley de Kepler se expresará por medio de la igualdad

$$r^2 d\theta = 2 c dt \quad (1.2)$$

donde  $c$  es una constante de proporcionalidad (constante de las áreas), entre el área barrida por el punto  $A$  y el tiempo empleado en describirla.

**Segunda ley.-** “Las órbitas descritas por los planetas son elipses, de las cuales el Sol ocupa un foco”.

De otra forma, si es  $w$  el ángulo entre el semieje mayor  $A_oB_o$  y la dirección del rayo origen  $OR$  (fig. 1.1), donde  $O$  representa el foco (o sea, el Sol), para un punto cualquiera  $A(r, \theta)$  sobre la elipse, se tiene

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - w)} \quad (1.3)$$

siendo  $p$  y  $e$  dos constantes (parámetro y excentricidad de la elipse).

**Tercera ley.-** “Los cubos de los semiejes mayores de las órbitas planetarias, son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlas”.

Por tanto, si  $a$  es el semieje mayor de la elipse descrita por un planeta y  $P$  el periodo, o tiempo que tarda en describirla una vez, se tendrá

$$\frac{a^3}{P^2} = \lambda \quad (1.4)$$

siendo  $\lambda$  una nueva constante.

Nota: Mas adelante veremos que la segunda ley de Kepler se cumple, en general, para un cónica cualquiera, en tanto que la tercera, aunque solo aproximada, se cumple bastante bien para todos los cuerpos del sistema solar.

## 2. LEY DE NEWTON

“La fuerza que origina un movimiento tal como el determinado por las leyes de Kepler (movimiento kepleriano), es la dada por la ley de atracción de Newton”.

En efecto, por tratarse de un movimiento plano, podemos descomponer la aceleración del punto  $A$  en sus componentes radial y transversal, es decir

$$a_R = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \qquad a_T = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \qquad (2.1)$$

donde  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dots$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\dots$ , expresan las derivadas sucesivas de  $r$  y  $\theta$ , con respecto del tiempo  $t$ .

Ahora bien, si derivamos la fórmula (1.2), tendremos

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = r (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) = r a_T = 0 \qquad (2.2)$$

que nos demuestra, con exclusión del caso  $r = 0$  (colisión de ambos astros), la anulación constante de la aceleración transversal, y por tanto “la fuerza que origina el movimiento es puramente radial”.

Para calcular esta aceleración radial, derivemos la fórmula (1.3) o segunda ley de Kepler. Resultan así las igualdades

$$\dot{r} = \frac{p e \dot{\theta} \sin(\theta - w)}{[1 + e \cos(\theta - w)]^2} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{p} e \sin(\theta - w) = \frac{2 c e}{p} \sin(\theta - w) \qquad (2.3)$$

$$\ddot{r} = \frac{2 c e \dot{\theta}}{p} \cos(\theta - w) = \frac{4 c^2 e}{r^2 p} \cos(\theta - w) \qquad (2.4)$$

$$r \dot{\theta}^2 = \frac{4 c^2}{r^2 p} [1 + e \cos(\theta - w)] \qquad (2.5)$$

Llevando las dos últimas expresiones a la fórmula (2.1) de la aceleración radial y multiplicando por la masa  $m$  del planeta  $A$ , se obtiene la componente radial de la fuerza  $f_R$ , que ejerce el Sol,

$$f_R = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = - \frac{4 c^2 m}{r^2 p} \qquad (2.6)$$

Además, siendo  $a$ ,  $b$ , los semiejes de la órbita elíptica, el área de ésta es  $\pi a b$ , y podemos escribir

$$c = \frac{\pi a b}{P} \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad \frac{4 c^2}{p} = 4 \pi^2 \frac{a^3}{P^2} = 4 \pi^2 \lambda \qquad (2.7)$$

con lo cual, la fuerza dada por (2.6), adquiere la forma

$$f = - \frac{4 \pi^2 \lambda m}{r^2} = - \frac{m u_o}{r^2} \quad (2.8)$$

donde  $u_o$  designa una constante positiva que depende de la masa  $m_o$  del Sol.

Por otra parte, si admitimos que, por el principio de acción y reacción, el planeta  $A$  ejerce una fuerza igual y contraria a la del Sol, obtendremos

$$f = - \frac{m u_o}{r^2} = - \frac{m_o u}{r^2} \quad \frac{u_o}{m_o} = \frac{u}{m} = G \quad (2.9)$$

donde  $u$  es una constante positiva que depende de la masa  $m$  y  $G$  una nueva constante que recibe el nombre de constante de gravitación universal.

Despejando  $u_o = G m_o$  en (2.9) y sustituyéndolo en (2.8), llegamos finalmente a la expresión del módulo de la fuerza en la ley newtoniana

$$f = - G \frac{m m_o}{r^2} \quad (2.10)$$

que podemos enunciar del siguiente modo: “La fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta es atractiva, lleva la dirección de ambos cuerpos (Sol–planeta) y es proporcional a las masas de estos e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia mutua”.

La ley de atracción de Newton, que constituye el fundamento de toda la Mecánica celeste, ha sido dada en realidad para dos puntos materiales, aunque en las demostraciones anteriores hayamos identificado estos puntos con el Sol y un planeta. Conviene, pues, extender la ley de Newton a cuerpos de dimensiones finitas.

### 3. ATRACCION DE UNA ESFERA

Un interesante resultado, obtenido por Newton, es el siguiente:

“La atracción de una esfera sólida homogénea, de masa  $M$ , sobre un punto  $P$ , exterior, es equivalente a la atracción ejercida por un punto  $O$  (su centro), en el que se supone concentrada toda la masa de la esfera”.

Para simplificar la demostración, consideremos el punto  $P$ , de masa  $m$ , situado sobre el eje  $OZ$  y atraído por una esfera hueca de radio interior  $\rho$  y espesor  $d\rho$ .

El volumen del paralelepipedo elemental  $Q$ , esquematizado en la figura 3.1, será

$$\rho^2 d\phi d\theta \sin \theta$$

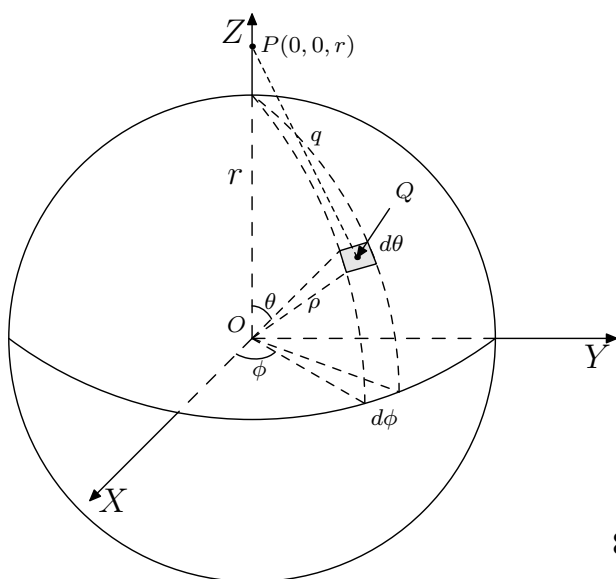


fig. 3.1



y por tanto, la componente  $f_z$  de atracción según el eje  $OZ$ , vendrá dada por la expresión

$$f_z = \frac{G m \sigma \rho^2 d\rho d\phi d\theta \sin \theta}{q^2} \cos \alpha \quad (3.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del parlepipedo elemental  $Q$ ,  $q$  la distancia  $PQ$  y  $\alpha = \widehat{OPQ}$ .

Integrando entre 0 y  $2\pi$  para el argumento  $\phi$ , y entre 0 y  $\pi$  para el argumento  $\theta$ , obtenemos la componente  $f_z$  de la esfera hueca

$$f_z = G m \sigma \rho^2 d\rho \int d\phi \int \frac{\sin \theta \cos \alpha}{q^2} d\theta = 2\pi G m \sigma \rho^2 d\rho \int \frac{\sin \theta \cos \alpha}{q^2} d\theta$$

Para calcular la última integral, expresemos el integrando en función de la variable  $q$ . Se tiene

$$\begin{aligned} q^2 &= \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \theta & q dq &= r \rho d\theta \sin \theta \\ \cos \alpha &= \frac{r - \rho \cos \theta}{q} \frac{r^2 + q^2 - \rho^2}{2r q} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la integral, resulta

$$f_z = \pi G m \sigma \rho d\rho \int_{r-\rho}^{r+\rho} \frac{r^2 + q^2 - \rho^2}{r^2 q^2} dq = \frac{\pi G m \sigma \rho d\rho}{r^2} \left[ \frac{\rho^2 - r^2}{q} + q \right]_{r-\rho}^{r+\rho} = \frac{4\pi G m \sigma \rho^2 d\rho}{r^2}$$

Finalmente, si integramos entre 0 y  $a$ , para la variable  $\rho$ , obtendremos la componente  $F_z$ , de atracción, correspondiente a una esfera sólida de masa  $M = 4\pi\sigma a^3/3$ . Es decir

$$F_z = \frac{4\pi G m \sigma}{r^2} \int_0^a \rho^2 d\rho = G \frac{M m}{r^2} \quad (3.3)$$

que demuestra el enunciado.

Dada la forma esférica del Sol y las pequeñas dimensiones de los planetas, en relación a las de aquel, el resultado anterior nos permite considerar el movimiento de  $n$  puntos materiales atraídos según la ley de Newton, como una buena aproximación del problema real del movimiento de los planetas.

Mas adelante se verá la extensión de estos problemas a cuerpos no esféricos de dimensiones finitas.

## 4. PROBLEMAS DE DOS CUERPOS

Comenzando por el caso mas sencillo, consideremos dos cuerpos puntuales  $A_1, A_2$ , de masas respectivas  $m_1, m_2$ , que se atraen según la ley de Newton. Sean  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , los vectores de posición

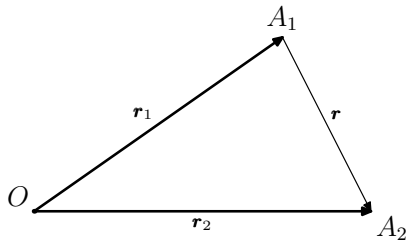


fig. 4.1

de ambos puntos, referidos a un origen  $O$  arbitrario, y sea  $\mathbf{r}$  el vector  $\overrightarrow{A_1A_2}$  (fig. 4.1).

El módulo de la fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  que ejerce  $A_1$  sobre  $A_2$ , será igual al módulo de la fuerza  $\mathbf{F}_{21}$  que ejerce  $A_2$  sobre  $A_1$ , teniéndose

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4.1)$$

donde  $r = |\mathbf{r}|$ . En cuanto a su dirección, ambas fuerzas tendrán la de la recta  $A_1A_2$ , o sea la del vector  $\mathbf{r}$ . Solamente diferirán en el sentido. Por tanto tendremos

$$\mathbf{F}_{21} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \mathbf{F}_{12} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.2)$$

donde hemos puesto el versor de la dirección  $\overrightarrow{A_1A_2}$  en la forma  $\mathbf{r}/r$ .

Sumando las ecuaciones (4.2), resulta

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (4.3)$$

de la que se deducen, por dos integraciones sucesivas, las igualdades

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{A} \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A} t + \mathbf{B} \quad (4.4)$$

siendo  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos vectores constantes.

Recordemos que, si  $\mathbf{r}_o$  es el vector que define la posición del centro de gravedad de ambos cuerpos, y ponemos  $M = m_1 + m_2$ , se tiene

$$M \mathbf{r}_o = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A} t + \mathbf{B} \quad (4.5)$$

de donde resulta la siguiente proposición:

”El centro de gravedad de dos cuerpos, que se atraen según la ley de Newton, se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme”.

Estudiamos ahora el movimiento relativo del cuerpo  $A_2$  respecto al cuerpo  $A_1$ . Este movimiento quedará definido por el vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (4.6)$$

que, derivado dos veces con respecto al tiempo, nos lleva a la fórmula

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (4.7)$$

Si dividimos las igualdades (4.2), respectivamente por  $m_1$ ,  $m_2$ , y restamos los resultados, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{k^2 \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.8)$$

donde la constante  $k$  viene dada por la expresión

$$\mu = k^2 = G M = G (m_1 + m_2) \quad (4.9)$$

La ecuación (4.8) es la que rige el movimiento relativo de dos cuerpos atraídos según la ley de Newton. Multiplicando vectorialmente los dos miembros de esta igualdad por  $\mathbf{r}$ , resulta

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (4.10)$$

de donde

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (4.11)$$

Esta igualdad puede ser, por tanto, integrada en la forma

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = 2 \mathbf{c} \quad (4.12)$$

designando por  $2 \mathbf{c}$  el vector constante que resulta de la integración. Así se obtiene, bajo una nueva formulación, la ley de las áreas prevista por la primera ley de Kepler.

Por otra parte, multiplicando escalarmente (4.12) por  $\mathbf{r}$ , obtenemos la igualdad

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (4.13)$$

En resumen, las igualdades (4.12) y (4.13) nos demuestran la siguiente proposición, equivalente a la primera ley de Kepler:

”El movimiento relativo de  $A_2$  con respecto a  $A_1$ , se verifica en un plano y cumple la ley de las áreas”.

## 5. TRAYECTORIA RELATIVA. INTEGRAL DE LA ENERGÍA

Para obtener la trayectoria relativa descrita por  $A_2$ , con respecto a  $A_1$ , multipliquemos vectorialmente por  $2 \mathbf{c}$  la igualdad (4.8). Así, en virtud de la conocida igualdad

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r \dot{r} \quad (5.1)$$

resultan las expresiones

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge 2 \mathbf{c} = -\frac{k^2 \mathbf{r}}{r^3} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{r^2} (\dot{r} \mathbf{r} - r \dot{\mathbf{r}}) = k^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.2)$$

Integrando y designando por  $\mathbf{e}$  un vector constante, se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge 2 \mathbf{c} = k^2 \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \quad (5.3)$$

o bien, siendo  $f$  el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{r}$ , tendremos

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = e r \cos f \quad (5.4)$$

de donde, multiplicando escalarmente por  $r$  la igualdad (5.3), resulta

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \wedge 2\mathbf{c}) = 2\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = 4c^2 = k^2 (r + r e \cos f) \quad (5.5)$$

y finalmente

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (5.6)$$

que es la ecuación de la trayectoria relativa en el sistema de coordenadas polares  $(r, f)$  y que, como sabemos, corresponde a una cónica de excentricidad  $e$  y parámetro

$$p = \frac{4c^2}{k^2} \quad (5.7)$$

Con esto queda probada la segunda ley de Kepler; pero el resultado obtenido es más amplio, pues extiende la forma de las posibles trayectorias relativas a una cónica cualquiera.

Veamos ahora una nueva integral del movimiento, que nos permite el cálculo de la velocidad. En efecto, si  $v$  denota el módulo de la velocidad orbital, tendremos

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{k^2 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} = k^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (5.8)$$

Integrando esta igualdad y siendo  $h$  la constante de integración resulta

$$v^2 - \frac{2k^2}{r} = 2h \quad (5.9)$$

que es la integral de la energía.

## 6. RELACIONES Y PROPIEDADES DEL MOVIMIENTO

Comencemos calculando el valor de la constante  $h$ . Para ello, recoremos las fórmulas (1.2) (2.3) y la expresión de la velocidad en el sistema de coordenadas polares  $(r, f)$ . Se tiene evidentemente

$$r^2 \dot{f} = 2c \quad \dot{r} = \frac{2ce}{p} \sin f \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \quad (6.1)$$

Por tanto, según (5.6) y (5.7), se deduce

$$2h = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 - \frac{2k^2}{r} = \frac{k^2}{p} [e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2 - 2(1 + e \cos f)] = \frac{k^2}{p} (e^2 - 1) \quad (6.2)$$

de donde

$$v^2 = k^2 \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (6.3)$$

Según el movimiento sea elíptico, parabólico o hiperbólico, se tendrá la siguiente tabla:

Elíptico	Parabólico	Hiperbólico	
$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$	(6.4)

$p = a(1 - e^2)$	$p = 0$	$p = a(e^2 - 1)$	(6.5)
------------------	---------	------------------	-------

$2h = -k^2/a$	$2h = 0$	$2h = k^2/a$	(6.6)
---------------	----------	--------------	-------

$v^2 = k^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$	$v^2 = 2k^2/r$	$v^2 = k^2 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$	(6.7)
------------------------------------------------------	----------------	------------------------------------------------------	-------

En particular, cuando el movimiento es circular ( $r = a$ ,  $e = 0$ ), nos queda

$$v^2 = k^2/a \quad (6.8)$$

La velocidad  $v^2 = 2k^2/r$ , del caso parabólico, suele recibir los nombres de velocidad de fuga, de escape o de liberación.

Señalemos, además, que el conocimiento de las constantes  $k$ ,  $h$ ,  $c$ , nos permite calcular los elementos fundamentales de la órbita, pues en los casos de movimiento elíptico o hiperbólico el semieje que se obtiene por la fórmula (6.6) y la excentricidad, según (6.2) por la relación

$$e^2 = 1 + \frac{8c^2 h}{k^4} \quad (6.9)$$

mientras en el caso parabólico, por ser  $2h = 0$ , bastará aplicar la fórmula (5.7) para obtener el parámetro.

## 7. LA CONSTANTE DE GRAVITACIÓN Y LA TERCERA LEY DE KEPLER

Consideremos dos planetas que se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol y sean  $m$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $P$ ,  $m'$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $P'$ , sus masas, semiejes y periodos respectivos. Entonces, si  $m_o$  designa la masa del Sol, se tendrá

$$G(m_o + m) = \frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{P^2} : \frac{b^2}{a} = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2} \quad (7.1)$$

y análogamente

$$G(m_o + m') = 4\pi^2 \frac{a'^3}{P'^2}$$

Dividiendo ambas fórmulas, resultará

$$\frac{a'^3}{P'^3} : \frac{a^3}{P^3} = \frac{m_o + m'}{m_o + m} = \frac{1 + m'/m_o}{1 + m/m_o} = \lambda \quad (7.2)$$

que es la verdadera forma de la tercera ley de Kepler.

En el caso del sistema solar, por ser la masa del Sol muy superior a la de cualquiera de los planetas, vemos que la tercera ley de Kepler se cumple con bastante exactitud, para  $\lambda \simeq 1$ .

Pasemos ahora a la determinación de la constante de gravitación. Sea  $m_o$  la masa del Sol y  $m$  la masa del conjunto Tierra+Luna, cuyas masas respectivas son  $m_1$ ,  $m_2$ . Tomando como base la fórmula (7.1), Gauss eligió las siguientes unidades fundamentales:

1. De tiempo: el día medio
2. De masa: la del Sol
3. De longitud: el semieje mayor de la órbita terrestre.

Los valores asignados por él a los distintos factores (7.1), fueron

$$m_o = 1 \quad , \quad a = 1 \quad , \quad m = \frac{1}{354,710} \quad , \quad P = 365,2563835$$

Con estos datos obtuvo el siguiente resultado

$$\sqrt{G} = \frac{2\pi}{P\sqrt{1+m}} = 0,01720209895 \quad (7.3)$$

Posteriormente, se ha comprobado la inexactitud de las cantidades utilizadas por Gauss; pero como la modificación de la constante de gravitación supondría volver a recalcular numerosas tablas, rehacer trabajos, etc., se ha preferido conservar su valor original con el nombre de constante de Gauss, modificando la unidad de distancia.

Actualmente los valores consignados en las Efemérides para los distintos datos, son los siguientes:

$$\begin{aligned} P &= 365,25636042 \quad \text{días medios} \\ m_o/m_1 &= 332,958 \\ m_o/(m_1 + m_2) &= 328,912 \\ m_1/m_2 &= 81,30 \\ a &= 149,600 \times 10^6 \quad \text{metros} \end{aligned}$$

Según esto, la fórmula (7.1) puede escribirse en la forma

$$G(m_o + m) = 0,0002959131 a^3/P^2 = 0,883831 \times 10^{-28} a_o^3/P^2$$

donde  $a$  está expresado en unidades astronómicas y  $a_o$  en kilómetros.

En el caso de la Tierra, obtendremos para el movimiento de un satélite artificial de masa despreciable.

$$a_o = 4,2241 \times 10^4 P^{2/3} = 331,26 P_o^{2/3}$$

donde  $a_o$  está dado en kilómetros al centro de la Tierra,  $P$  en días medios y  $P_o$  en minutos.

## 8. MOVIMIENTO CON RESPECTO AL CENTRO DE GRAVEDAD

El movimiento de cada uno de los cuerpos  $A_1, A_2$ , tal como ha sido definido en el párrafo 4, puede referirse al centro de gravedad del sistema. En efecto, si es  $r_o$ , el vector de posición del centro de gravedad, los movimientos de los cuerpos  $A_1, A_2$ , vendrán definidos por los vectores

$$\xi_1 = r_1 - r_o \qquad \xi_2 = r_2 - r_o \qquad (8.1)$$

que, según sabemos, satisfacen la ecuación

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 = 0 \qquad (8.2)$$

Combinando esta relación con la que se obtiene por diferencia de las fórmulas (8.1), es decir

$$\xi_2 - \xi_1 = r_2 - r_1 = r \qquad (8.3)$$

resulta

$$M \xi_1 = -m_2 r \qquad M \xi_2 = m_1 r \qquad (8.4)$$

$$M |\xi_1| = m_2 r \qquad M |\xi_2| = m_1 r \qquad (8.5)$$

Por otra parte, el movimiento uniforme del centro de gravedad, consignado en (4.5), nos demuestra la igualdad  $\ddot{r} = 0$ , de donde, por derivación de las expresiones (8.1), se obtiene

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{r}_1 \qquad \ddot{\xi}_2 = \ddot{r}_2 \qquad (8.6)$$

Basta, pues, sustituir los vectores  $\ddot{r}_1, r, \ddot{r}_2, r$ , dados por (8.4), (8.6) y la distancia  $r$  por (8.5), en las igualdades (4.2), para obtener respectivamente

$$\ddot{\xi}_1 = -\frac{G m_2^3 \xi_1}{M^2 |\xi_1|^3} \qquad \ddot{\xi}_2 = -\frac{G m_1^3 \xi_2}{M^2 |\xi_2|^3} \qquad (8.7)$$

Estas igualdades son de la misma forma estudiada en los párrafos 4 y 5, lo que nos permite afirmar que las trayectorias que describen ambos cuerpos, con respecto a su centro de gravedad, son cónicas.

## 9. LEY HORARIA DE UN MOVIMIENTO KEPLERIANO. CASO PARABÓLICO

Ya hemos comprobado que la órbita correspondiente a un movimiento kepleriano, es una cónica. Sin embargo para poder fijar las posiciones del satélite, con respecto al cuerpo o astro principal (que ocupa un foco de la cónica), es necesario establecer una relación entre el tiempo  $t$  y alguno de los parámetros que la definen. En principio esta relación o ley horaria del movimiento puede ser de cualquiera de los tipos

$$\phi(r, t) = 0 \qquad \psi(f, t) = 0$$

pero, debido a la forma de las ecuaciones, en algunos casos (elíptico o hiperbólico) es conveniente utilizar variables auxiliares. La deducción de esta ley horaria puede efectuarse de distintas formas, ya sea por aplicación de la ecuación de las áreas, la fórmula de la velocidad, etc.

En el caso parabólico, tendremos

$$r = p/(1 + \cos f) \qquad r^2 df = 2 c dt \qquad (9.1)$$

donde  $r$  designa el radio vector y  $f$  la anomalía verdadera.

Sustituyendo el valor de  $r$  dado por la primera, en la segunda, e integrando entre el instante  $T$  en que el satélite pasa por el vértice ( $f = 0$ ) de la parábola, llamado época de paso por periastro (perihelio, perigeo, etc), y un instante cualquiera  $t$ , tendremos

$$2 c (t - T) = p^2 \int_0^f \frac{df}{(1 + \cos f)^2} = \frac{p^2}{2} \int_0^f \frac{df}{2 \cos^2 \frac{f}{2} \cos^2 \frac{f}{2}}$$

o bien

$$\frac{1}{3} \operatorname{tag}^3 \frac{f}{2} + \operatorname{tag} \frac{f}{2} = H \qquad H = 4 c (t - T)/p^2 \qquad (9.2)$$

que es la ley horaria del movimiento parabólico.

Aunque existen tablas para calcular  $f$  en función de  $H$ , también se pueden calcular estas valores directamente. En efecto, hagamos

$$\operatorname{tag} \frac{f}{2} = 2 \operatorname{ctg}(2 u) = \operatorname{ctg} u - \operatorname{tag} u \qquad \operatorname{tag}^3 u = \operatorname{tag} \frac{w}{2} \qquad (9.3)$$

Entonces tendremos

$$\operatorname{tag}^3 \frac{f}{2} = \operatorname{ctg} \frac{w}{2} - \operatorname{tag} \frac{w}{2} + 3 (\operatorname{tag} u - \operatorname{ctg} u) = 2 \operatorname{ctg} w - 3 \operatorname{tag} \frac{f}{2}$$

de donde se deduce fácilmente

$$H = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} w \qquad (9.4)$$

Así pues, esta última igualdad nos permite obtener  $w$  en función de  $H$ , calculándose sucesivamente  $u$  y  $f$ , por las expresiones (9.3).



## 10. MOVIMIENTO ELÍPTICO. ANOMALÍAS

Cuando un movimiento kepleriano es elíptico, suele introducirse, en lugar del periodo orbital  $P$ , el movimiento medio  $n$ , definido en la igualdad

$$n = 2 \pi / P \quad (10.1)$$

De esta forma, la expresión (7.1) se puede escribir

$$k^2 = G M = n^2 a^3 \quad (10.2)$$

Para deducir la ley horaria del movimiento elíptico, utilizaremos la fórmula de la velocidad (6.7) (para el caso elíptico). Tendremos pues

$$\dot{r}^2 + \frac{n^2 a^4 (1 - e^2)}{r^2} = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (10.3)$$

de donde

$$\dot{r}^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2]$$

y finalmente

$$\pm n dt = \frac{r dr}{a \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} \quad (10.4)$$

Haciendo el cambio de variable

$$a - r = a e \cos E \quad dr = a e \sin E dE \quad (10.5)$$

la ecuación (10.4) adopta la forma

$$\pm n dt = (1 - e \cos E) dE \quad (10.6)$$

que se integra inmediatamente. En efecto, si damos a  $t$  los valores  $(T, t)$ , donde  $T$  designa como anteriormente la época de paso por periastro, vemos, según (10.5), que la variable  $E$ , llamada anomalía excéntrica, toma los valores  $(0, E)$ , toda vez que en el periastro es  $r = a(1 - e)$ . Así, tendremos por integración de (10.6), la expresión fundamental o ley horaria

$$E - e \sin E = n(t - T) \quad (10.7)$$

que se conoce con el nombre de ecuación de Kepler.

En ella se ha prescindido del doble signo que figuraba en (10.6), correspondiente a un movimiento retrógrado, porque los convenios que se hacen en el cálculo de órbitas así lo determinan.

La cantidad

$$M = n(t - T) \quad (10.8)$$

que figura en el segundo miembro de (10.7), y no debe confundirse con la masa total del sistema, recibe el nombre anomalía media.

En resumen, las ecuaciones fundamentales del movimiento elíptico, nos dan el radio vector por las expresiones

$$r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos f) = a(1 - e \cos E) \quad (10.9)$$

y nos relacionan las anomalías media y excéntrica por la ecuación de Kepler. Nos falta, por tanto, establecer una relación entre las anomalías excéntrica y verdadera, para completar el formulario correspondiente.

Para ello, dividamos los dos últimos miembros de la igualdad anterior por  $a$ , y despejemos  $\cos f$ . Otendremos

$$\cos f = (\cos E - e)/(1 - e \cos E) \quad (10.10)$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{f}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e \cos E} \quad 2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e \cos E}$$

Dividendo ambas igualdades, resulta

$$\operatorname{tag}^2 \frac{f}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tag}^2 \frac{E}{2}$$

y finalmente

$$\operatorname{tag} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tag} \frac{E}{2} \quad (10.11)$$

que es la fórmula más frecuentemente empleada para relacionar las anomalías excéntrica y verdadera.

## 11. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE KEPLER

En la ecuación de Kepler, el cálculo de la anomalía media a partir de la excentricidad y de la anomalía excéntrica, es inmediato. Pero no resulta tan sencillo calcular  $E$ , dados  $M$  y  $e$ . Entre los numerosos métodos que existen para resolver esta importante cuestión, citaremos los siguientes:

- a) **Por tablas.**- Se han calculado tablas, de doble entrada, en las que los argumentos son  $M$  y  $e$ , obteniéndose los correspondientes valores de  $E$  directamente o por interpolación.
- b) **Método gráfico.**- Dibujando en un sistema cartesiano las líneas

$$y = \operatorname{sen} x \quad y = \frac{1}{e}(x - x_0) \quad (11.1)$$

en el que se supone que  $x = E$ ,  $x_0 = M$ , están dados en radianes, para cada valor de  $M$  obtenemos una recta, cuyo punto de intersección con la primera curva verifica la igualdad

$$e \operatorname{sen} x = x - x_0$$

que es la ecuación de Kepler.

- c) **Por aproximaciones sucesivas.**- Los dos métodos anteriores dan valores aproximados, que es necesario mejorar en la mayoría de los casos. Para ello puede procederse del siguiente modo:

Sea  $E_o$  un valor aproximado de  $E$  y hagamos  $x = E - E_o$ . Llevando estos valores a la ecuación de Kepler, tendremos

$$E_o + x - e \operatorname{sen}(E_o + x) = M$$

Suponiendo que  $x$  es lo suficientemente pequeño para poder hacer  $\operatorname{sen} x \simeq x$ ,  $\cos x \simeq 1$ , la ecuación anterior nos da

$$x = \frac{M - (E_o - e \operatorname{sen} E_o)}{1 - e \cos E_o}$$

con lo cual se obtiene un nuevo valor  $E = E_o + x$ , más aproximado. El proceso puede repetirse entrando con el nuevo valor así obtenido. Prácticamente, las operaciones se paralizan cuando el valor  $x$  obtenido sea inferior a la aproximación deseada en los cálculos.

## 12. MOVIMIENTO HIPERBÓLICO

El movimiento hiperbólico, puede estudiarse de forma similar al elíptico. En efecto, introduzcamos una cantidad  $v$ , definida por la igualdad

$$k^2 = GM = v^2 a^3 \quad (12.1)$$

Entonces, la fórmula (6.8) de la velocidad se puede escribir

$$\dot{r}^2 + \frac{v^2 a^4 (e^2 - 1)}{r^2} = v^2 a^3 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (12.2)$$

de donde

$$\dot{r} = \frac{\pm v a}{r} \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2} \quad (12.3)$$

Para efectuar la integración, basta introducir una nueva variable  $F$ , tal que

$$a + r = a e \operatorname{Ch} F \quad dr = a e \operatorname{Sh} F dF \quad (12.4)$$

Con estas variables, la ecuación (12.3) adopta la forma

$$\pm v dt = (e \operatorname{Ch} F - 1) dF$$

y efectuando la integración entre los límites  $(T, t)$ , a los corresponden, respectivamente  $(O, F)$ , toda vez que en periastro es  $r = a(e - 1)$ , se tiene

$$e \operatorname{Sh} F - F = v(t - T) \quad (12.5)$$

que es la ley horaria del movimiento hiperbólico.

Analogamente, de las igualdades

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} = a(e \operatorname{Ch} F - 1) \quad (12.6)$$

que nos definen el radio vector en ambas anomalías, se deduce la relación

$$\cos f = \frac{\operatorname{Ch} F - e}{1 - e \operatorname{Ch} F} \quad (12.7)$$

de donde

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{f}{2} = \frac{(1+e)(1-\operatorname{Ch} F)}{1-e \operatorname{Ch} F} \quad 2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{(1-e)(1+\operatorname{Ch} F)}{1-e \operatorname{Ch} F}$$

y finalmente

$$\operatorname{tag} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{Th} \frac{F}{2} \quad (12.8)$$

Notemos que el movimiento hiperbólico, al igual que el parabólico, es de menor aplicación que el caso elíptico; sin embargo, se presenta en algunos casos, como ocurre con la entrada de meteoritos en la atmósfera terrestre, problemas de transferencia, optimización, etc.

### 13. DIVERSAS FÓRMULAS EN EL MOVIMIENTO ELÍPTICO: ECUACIÓN DE THIELE

De acuerdo con las notaciones que venimos empleando, las ecuaciones fundamentales del movimiento elíptico de un punto  $A_i(r_i, f_i)$  con respecto a su foco  $O$ , son:

$$r_i = a(1 - e \cos E_i) \quad (13.1) \quad r_i \cos f_i = a(\cos E_i - e) \quad (13.2)$$

$$E_i - e \operatorname{sen} E_i = n(t_i - T) \quad (13.3) \quad r_i \operatorname{sen} f_i = a \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E_i \quad (13.4)$$

Restando o sumando (13.1), (13.2), se obtienen fácilmente las igualdades

$$\sqrt{r_i} \operatorname{sen} \frac{f_i}{2} = \sqrt{a(1+e)} \operatorname{sen} \frac{E_i}{2} \quad (13.5) \quad \sqrt{r_i} \cos \frac{f_i}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E_i}{2} \quad (13.6)$$

Ahora bien, dadas dos posiciones  $A_i(r_i, f_i)$ ,  $A_k(r_k, f_k)$ , hagamos

$$2 g_{ik} = E_k - E_i \quad (13.7) \quad 2 G_{ik} = E_k + E_i \quad (13.8)$$

$$T_{ik} = t_k - t_i \quad (13.9) \quad 2 V_{ik} = f_k - f_i \quad (13.10)$$

Entonces, multiplicando convenientemente <sup>1</sup> las ecuaciones (13.5), (13.6) para los subíndices  $i, k$ , tendremos

$$\sqrt{r_i r_k} \operatorname{sen} V_{ik} = a \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} g_{ik} \quad (13.11)$$

$$\sqrt{r_i r_k} \operatorname{cos} V_{ik} = a (\operatorname{cos} g_{ik} - e \operatorname{cos} G_{ik}) \quad (13.12)$$

De manera análoga, de las fórmulas (13.1), (13.3) para los subíndices  $i, k$ , se deducen las siguientes

$$n T_{ik} = 2 g_{ik} - 2 e \operatorname{cos} G_{ik} \operatorname{sen} g_{ik} \quad (13.13)$$

$$r_k + r_i = 2 a (1 - e \operatorname{cos} G_{ik} \operatorname{cos} g_{ik}) \quad (13.14)$$

$$r_k - r_i = 2 a e \operatorname{sen} G_{ik} \operatorname{sen} g_{ik} \quad (13.15)$$

y multiplicando las expresiones (13.11) y (13.12) entre si, resulta

$$r_i r_k \operatorname{sen}(2 V_{ik}) = a^2 \sqrt{1 - e^2} (\operatorname{sen}(2 g_{ik}) - 2 e \operatorname{cos} G_{ik} \operatorname{sen} g_{ik}) \quad (13.16)$$

Dividiendo esta última por  $a^2 \sqrt{1 - e^2}$  y restando de (13.13), se llegan finalmente a la fórmula de Thiele

$$n T_{ik} - [(E_k - E_i) - \operatorname{sen}(E_k - E_i)] = \frac{r_i r_k \operatorname{sen}(f_k - f_i)}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \quad (13.17)$$

cuya utilidad veremos mas adelante.

Empleando funciones hiperbólicas, pueden obtenerse fórmulas análogas para el movimiento hiperbólico, si bien su utilidad está muy restringida por la carencia real de órbitas de este tipo. En el caso parabólico las expresiones difieren bastante de las consignadas.

## 14. LAS FUNCIONES $F$ Y $G$ EN EL MOVIMIENTO ELÍPTICO

Consideraemos un movimiento elíptico definido por un vector de posición  $\mathbf{r}(t)$ , que satisface a las ecuaciones (4.8) y (4.12), o sea

$$\ddot{\mathbf{r}} = -u \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = 2 \mathbf{c} \neq 0 \quad (14.1)$$

y donde la función  $u$  está dada por la relación

$$u = k^2 / r^3 \quad (14.2)$$

Para un instante inicial  $t_o$ , tendremos un par de vectores  $\mathbf{r}_o = \mathbf{r}(t_o)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_o = \dot{\mathbf{r}}(t_o)$ , que no están en línea recta por ser  $\mathbf{c} \neq 0$ , y que nos determinan el plano orbital. Evidentemente, cualquier otro vector  $\mathbf{r}(t)$ , de este plano puede definirse en la forma

$$\mathbf{r} = F \mathbf{r}_o + G \dot{\mathbf{r}}_o \quad (14.3)$$

siendo  $F$  y  $G$  funciones a determinar.

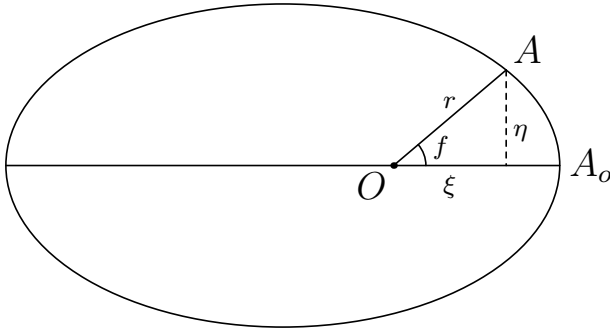


fig. 14.1

Para ello, conocemos designando por  $\xi, \eta$ , las coordenadas cartesianas de un punto  $A$ , referido al foco  $O$  de la elipse (fig. 14.1). Entonces, según (13.2), (13.4), tendremos

$$\begin{aligned}\xi &= a (\cos E - e) \\ \eta &= b \operatorname{sen} E\end{aligned}\quad (14.4)$$

Derivando estas coordenadas con respecto al tiempo, resulta

$$\dot{\xi} = -a \dot{E} \operatorname{sen} E \quad \dot{\eta} = b \dot{E} \cos E \quad (14.5)$$

y teniendo en cuenta que por derivación de la ecuación (13.3) de Kepler, se deduce

$$n = \dot{E} (1 - e \cos E) = \dot{E} r/a \quad \dot{E} = \frac{k}{r a^{1/2}} \quad (14.6)$$

las fórmulas (14.5) se escribirán

$$\dot{\xi} = -\frac{k a^{1/2}}{r} \operatorname{sen} E \quad \dot{\eta} = \frac{k p^{1/2}}{r} \cos E \quad (14.7)$$

Con ayuda de las fórmulas (14.4) y (14.7), estamos en condiciones de obtener una primera expresión de las funciones  $F, G$ . En efecto, si multiplicamos vectorialmente (14.3) por  $\mathbf{r}_o$  y  $\dot{\mathbf{r}}_o$ , tendremos

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}_o = G \dot{\mathbf{r}}_o \wedge \mathbf{r}_o = -2 G \mathbf{c} \quad \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}_o = F \mathbf{r}_o \wedge \dot{\mathbf{r}}_o = 2 F \mathbf{c} \quad (14.8)$$

y considerando las componentes perpendiculares al plano de la órbita, únicas que no son nulas en las anteriores igualdades, resulta

$$2 F c = \xi \dot{\eta}_o - \eta \dot{\xi}_o \quad 2 G c = \xi_o \dot{\eta} - \eta_o \dot{\xi} \quad (14.9)$$

de donde

$$F = \frac{k a^{3/2} \sqrt{1-e^2}}{2 c r_o} [\cos(E - E_o) - e \cos E_o] = \frac{a}{r_o} [\cos(E - E_o) - e \cos E_o]$$

y finalmente

$$F = 1 - \frac{a}{r_o} [1 - \cos(E - E_o)] \quad (14.10)$$

Análogamente se obtiene

$$G = \frac{a b}{2 c} [\operatorname{sen}(E - E_o) - e (\operatorname{sen} E - \operatorname{sen} E_o)] = \frac{a^{3/2}}{k} [\operatorname{sen}(E - E_o) - e (\operatorname{sen} E - \operatorname{sen} E_o)]$$

y combinando esta ecuación con la (13.13) escrita en la forma

$$E - E_o - e (\operatorname{sen} E - \operatorname{sen} E_o) = n (t - t_o) \quad (14.11)$$

se llega a la expresión

$$G = t - t_o - \frac{1}{n} [(E - E_o) - \operatorname{sen}(E - E_o)] \quad (14.12)$$

## 15. DESARROLLOS EN SERIE DE LAS FUNCIONES $F$ Y $G$

Consideremos un desarrollo en serie del vector  $\mathbf{r}(t)$  con respecto al valor que tomarán éste y sus derivadas para un cierto instante  $t = 0$ . Tendremos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \frac{t}{1!} \dot{\mathbf{r}}_o + \frac{t^2}{2!} \ddot{\mathbf{r}}_o + \frac{t^3}{3!} \dddot{\mathbf{r}}_o + \frac{t^4}{4!} \mathbf{r}_o^{iv} + \frac{t^5}{5!} \mathbf{r}_o^v + \dots \quad (15.1)$$

Por otra parte, la ecuación diferencial (14.1) del movimiento, nos permitirá expresar todas las derivadas de orden igual o superior al segundo, en función de  $\mathbf{r}_o, \dot{\mathbf{r}}_o$ . En efecto tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -u \mathbf{r} \\ \dddot{\mathbf{r}} &= -\dot{u} \mathbf{r} - u \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}^{iv} &= (-\ddot{u} + u^2) \mathbf{r} - 2 \dot{u} \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}^v &= (-\dddot{u} + 4 u \ddot{u}) \mathbf{r} - (3 \ddot{u} - u^2) \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}^{vi} &= (-\mathbf{u}^{iv} + 7 u \ddot{u} - u^3 + 4 \dot{u}^2) \mathbf{r} - (4 \ddot{u} - 6 u \dot{u}) \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}^{vii} &= (-\mathbf{u}^{v} + 15 \dot{u} \ddot{u} + 11 u \dddot{u} - 9 u^2 \dot{u}) \mathbf{r} - (5 \mathbf{u}^{iv} - 13 u \ddot{u} - 10 \dot{u}^2 + u^3) \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}^{viii} &= (-\mathbf{u}^{vi} + 15 \ddot{u}^2 + 26 \dot{u} \dddot{u} + 16 u \mathbf{u}^{iv} - 28 u \dot{u}^2 - 22 u^2 \ddot{u} + u^4) \mathbf{r} - \\ &\quad - (6 \mathbf{u}^v - 48 \dot{u} \ddot{u} - 24 u \dddot{u} + 12 u^2 \dot{u}) \dot{\mathbf{r}} \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

y substituyendo todas estas derivadas en (15.1), y separando los términos correspondientes a  $\mathbf{r}_o$  y  $\dot{\mathbf{r}}_o$ , obtenemos

$$\begin{aligned} F = & 1 - \frac{1}{2!} u_o t^2 - \frac{1}{3!} \dot{u}_o t^3 - \frac{1}{4!} (\ddot{u}_o - u_o^2) t^4 - \frac{1}{5!} (\dddot{u}_o - 4 u_o \dot{u}_o) t^5 - \frac{1}{6!} (\mathbf{u}_o^{iv} - 7 u_o \ddot{u}_o + \\ & + u_o^3 - 4 \dot{u}_o^2) t^6 - \frac{1}{7!} (\mathbf{u}_o^v - 15 \dot{u}_o \ddot{u}_o - 11 u_o \dddot{u}_o + 9 u_o^2 \dot{u}_o) t^7 - \frac{1}{8!} (\mathbf{u}_o^{vi} - 15 \ddot{u}_o^2 - \\ & - 26 \dot{u}_o \ddot{u}_o - 16 u_o \mathbf{u}_o^{iv} + 28 u_o \dot{u}_o^2 + 22 u_o^2 \ddot{u}_o - u_o^4) t^8 + \dots \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\begin{aligned} G = & t - \frac{1}{3!} u_o t^3 - \frac{2}{4!} \dot{u}_o t^4 - \frac{1}{5!} (3 \ddot{u}_o - u_o^2) t^5 - \frac{1}{6!} (4 \ddot{u}_o - 6 u_o \dot{u}_o) t^6 - \frac{1}{7!} (5 \mathbf{u}_o^{iv} - \\ & - 13 u_o \ddot{u}_o - 10 \dot{u}_o^2 + u_o^3) t^7 - \frac{1}{8!} (6 \mathbf{u}_o^v - 48 \dot{u}_o \ddot{u}_o - 24 u_o \ddot{u}_o + 12 u_o^2 \dot{u}_o) t^8 + \dots \end{aligned} \quad (15.4)$$

En ocasiones tiene más interés la obtención de expresiones de  $F$  y  $G$ , que puedan ser calculadas a partir de los vectores  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ , correspondientes a un cierto instante  $t_o$ .

Para ello, comencemos recordando que, dados los vectores  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ , se pueden determinar los módulos  $r, v$ , por las relaciones

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \qquad v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Por tanto, si introducimos unas nuevas variables  $p, q$ , por medio de las fórmulas

$$p = \frac{1}{2 r^2} \frac{d(r^2)}{dt} \qquad q = \frac{1}{2 r^2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} \qquad (15.5)$$

tendremos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -u \mathbf{r} \qquad \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -u r^2 \qquad \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -u p r^2$$

y las cantidades  $u, p, q$ , así como las sucesivas derivadas, se obtienen por las igualdades siguientes

$$\begin{aligned} u &= k^2 r^{-3} & p &= (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) r^{-2} & q &= v^2 r^{-2} - u \\ \dot{u} &= -3 u p & \dot{p} &= q - 2 p^2 & \dot{q} &= -p (u + 2 q) \\ \ddot{u} &= 3 u (5 p^2 - q) & \ddot{p} &= p (4 p^2 - 6 q - u) & \ddot{q} &= p^2 (7 u + 8 q) - q (u + 2 q) \\ & & & \dots & & \end{aligned} \qquad (15.6)$$

Llevados los valores de  $u$  y sus derivadas, obtenidos en (15.6), a las fórmulas (15.3) y (15.4), resulta <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{1}{2} u_o t^2 + \frac{1}{2} u_o p_o t^3 + \frac{1}{4!} (3 u_o q_o - 15 u_o p_o^2 + u_o^2) t^4 + \frac{1}{8} (7 u_o p_o^3 - 3 u_o p_o q_o - \\ &\quad - u_o^2 p_o) t^5 + \frac{1}{6!} (630 u_o p_o^3 q_o - 24 u_o^2 q_o - u_o^3 - 45 u_o q_o^2 - 94 u_o p_o^4 + 210 u_o^2 p_o^2) t^6 + \dots \\ G &= t - \frac{1}{6} u_o t^3 + \frac{1}{4} u_o p_o t^4 + \frac{1}{5!} (9 u_o q_o - 45 u_o p_o^2 + u_o^2) t^5 + \\ &\quad + \frac{2}{6!} (210 u_o p_o^3 - 90 u_o p_o q_o - 15 u_o^2 p_o) t^6 + \dots \end{aligned}$$

## 16. TEOREMA DE LAMBERT

Por su importancia en el cálculo de órbitas y especialmente en el caso parabólico, demostraremos el siguiente teorema de Lambert:

“En el movimiento kepleriano de un punto  $P$  con respecto a otro  $O$ , la diferencia de tiempo  $(t - t_o)$ , transcurrido entre dos posiciones  $P_o, P$ , se puede expresar como función exclusiva de la suma  $(r_o + r)$  de los radios vectores, la cuerda  $s = \overline{P_o P}$  y la integral de la energía  $h$ ”.

Para demostrar este teorema recordemos que, si un determinado problema dinámico puesto en forma canónica, el hamiltoniano  $H(p, q)$ , depende solamente de las coordenadas  $q_i$  y los momentos  $p_i$ , existe la integral  $H(p, q) = h$ , y si además es  $W(q_i, h)$  una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$H(W_{q_i}, q_j) = h \qquad (16.1)$$

donde se ha puesto

$$p_i = W_{q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad (16.2)$$



se tiene

$$t - t_0 = W_h \quad (16.3)$$

(Ver: Iñiguez, Cid. Mecánica Teórica, II, 202, 215, Ed. Dossat, 1965).

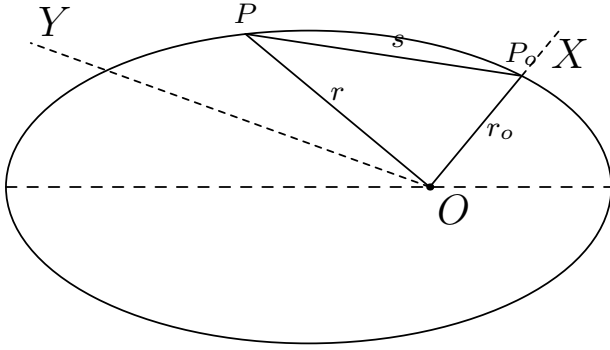


fig. 16.1

De acuerdo con la fig. 16.1, la posición del punto  $P$  queda determinada por sus coordenadas  $(x, y)$ . Entonces, eligiendo unas variables auxiliares  $\xi, \eta$ , definidas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} r_o (1 + \cos \xi \operatorname{Ch} \eta) \\ y &= \frac{1}{2} r_o \operatorname{sen} \xi \operatorname{Sh} \eta \end{aligned} \quad (16.4)$$

se obtiene fácilmente el radio vector  $r$  y la cuerda  $s$ . En efecto,

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} r_o\right)^2 (\operatorname{Ch} \eta + \cos \xi)^2 \quad r = \frac{1}{2} r_o (\operatorname{Ch} \eta + \cos \xi) \quad (16.5)$$

$$s^2 = (r_o - x)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} r_o\right)^2 (\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi)^2 \quad s = \frac{1}{2} r_o (\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi) \quad (16.6)$$

Si ahora introducimos unas variables  $q_1, q_2$ , dadas por las relaciones

$$q_1 = \frac{1}{2} (r - s) = \frac{1}{2} r_o \cos \xi \quad q_2 = \frac{1}{2} (r + s) = \frac{1}{2} r_o \operatorname{Ch} \eta \quad (16.7)$$

y derivamos con respecto al tiempo, resulta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} r_o (-\dot{\xi} \operatorname{sen} \xi \operatorname{Ch} \eta + \dot{\eta} \cos \xi \operatorname{Sh} \eta) & \dot{q}_1 &= -\frac{1}{2} r_o \dot{\xi} \operatorname{sen} \xi \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} r_o (\dot{\xi} \cos \xi \operatorname{Sh} \eta + \dot{\eta} \operatorname{sen} \xi \operatorname{Ch} \eta) & \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} r_o \dot{\eta} \operatorname{Sh} \eta \end{aligned} \quad (16.8)$$

de donde

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r s (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = (q_2^2 - q_1^2) (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) \quad (16.9)$$

Eliminando las derivadas,  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ , con ayuda de (16.8), se llega a la siguiente expresión de la energía cinética<sup>3</sup>

$$T = \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) \left[ -\frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - \frac{1}{4} r_o^2} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2^2 - \frac{1}{4} r_o^2} \right] \quad (16.10)$$

Analogamente, normalizado la constante  $k$  por un cambio de la unidad de tiempo  $\tau = k t$ , el potencial será<sup>4</sup>

$$V = -1/(q_1 + q_2) = -(q_2 - q_1)/(q_2^2 - q_1^2) \quad (16.11)$$

Esto nos permite calcular los momentos

$$p_1 = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_1} = - \left( \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_1^2 - \frac{1}{4} r_o^2} \right) \dot{q}_1 \quad p_2 = \left( \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - \frac{1}{4} r_o^2} \right) \dot{q}_2 \quad (16.12)$$

con lo cual la integral  $H(p, q) = T + V = h$ , de la energía, adopta la forma

$$\frac{1}{2} \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \left[ - \left( q_1^2 - \frac{1}{4} r_o^2 \right) p_1^2 + \left( q_2^2 - \frac{1}{4} r_o^2 \right) p_2^2 \right] - \frac{q_2 - q_1}{q_2^2 - q_1^2} = h \quad (16.13)$$

y la ecuación (16.1), de variables separables, se podrá escribir

$$\frac{1}{2} \left( q_2^2 - \frac{1}{4} r_o^2 \right) W_{q_2}^2 - (q_2 + h q_2^2) = \frac{1}{2} \left( q_1^2 - \frac{1}{4} r_o^2 \right) W_{q_1}^2 - (q_1 + h q_1^2) = \text{const.}$$

Como vemos, el problema planteado se reduce a la integración de una ecuación del tipo

$$\left( q^2 - \frac{1}{4} r_o^2 \right) W_q - 2 (q + h q^2) = C \quad (16.14)$$

donde la constante  $C$  viene determinada para  $t = t_o$ , por ser  $q_1 = \frac{1}{2} r_o$ , y nos queda

$$C = -2 \left[ \frac{1}{2} r_o + h \left( \frac{1}{2} r_o \right)^2 \right] \quad W_q = 2^{1/2} \left[ \frac{1}{q + \frac{1}{2} r_o} + h \right]^{1/2} \quad (16.15)$$

Haciendo el cambio  $z = q + \frac{1}{2} r_o$ , resulta

$$W = 2^{1/2} \int_{q_1 + \frac{1}{2} r_o}^{q_2 + \frac{1}{2} r_o} (z^{-1} + h)^{1/2} dz \quad (16.16)$$

y la fórmula (16.3) concluye la demostración del teorema enunciado, de manera explícita, por medio de la integral

$$k(t - t_o) = \tau - \tau_o = W_h = 2^{-1/2} \int_{\frac{1}{2}(r_o + r - s)}^{\frac{1}{2}(r_o + r + s)} (z^{-1} + h)^{-1/2} dz \quad (16.17)$$

La integración de la fórmula (16.17) es diferente según los casos  $h = 0$  (parabólico),  $h < 0$  (elíptico),  $h > 0$  (hiperbólico).

En el caso parabólico, la fórmula obtenida, será

$$k(t - t_o) = \frac{1}{6} \left[ (r_o + r + s)^{3/2} \pm (r_o + r - s)^{3/2} \right] \quad (16.18)$$

En los casos hiperbólico y elíptico, basta hacer respectivamente

$$u_o = 2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \left[ \frac{1}{2}(r_o + r - s) h \right]^{1/2} \quad w_o = 2 \operatorname{arcsen} \left[ -\frac{1}{2}(r_o + r - s) h \right]^{1/2}$$

$$u = 2 \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \left[ \frac{1}{2}(r_o + r - s) h \right]^{1/2} \quad w = 2 \operatorname{arcsen} \left[ -\frac{1}{2}(r_o + r - s) h \right]^{1/2}$$

para obtener las fórmulas correspondientes

$$k(t - t_o) = (2h)^{-3/2} [(\operatorname{Sh} u - u) \pm (\operatorname{Sh} u_o - u_o)] \quad (16.19)$$

$$k(t - t_o) = (-2h)^{3/2} [(w - \operatorname{sen} u) \pm (w_o - \operatorname{sen} u_o)] \quad (16.20)$$

El signo superior (inferior) en las expresiones (16.18), (16.19), (16.20), se tomará según el segmento sombreado de la cónica no contenga (o contenga) el foco  $O$  (fig. 16.2).

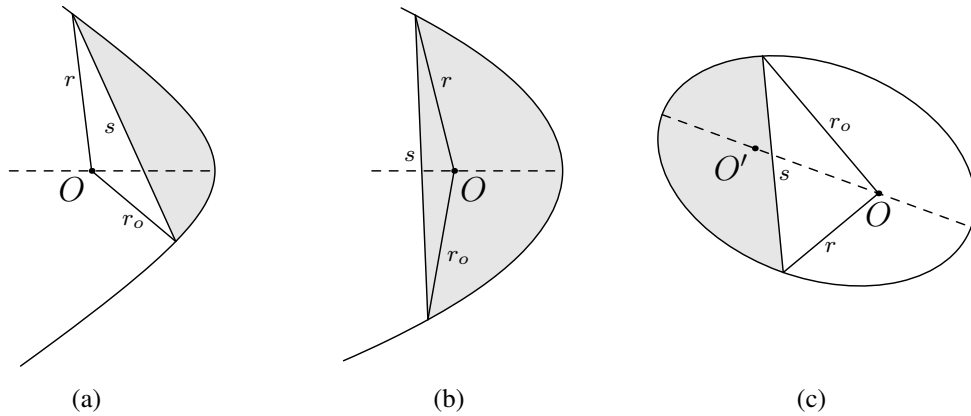


fig. 16.2

Además, en el caso elíptico, se deberá reemplazar  $w$  por  $2\pi - w$ , cuando el segmento sombreado contenga al otro foco  $O'$  (fig. 2(c)), si bien seguirá observándose la regla anterior de signos.

## EJERCICIOS

- 1.- En un movimiento elíptico ¿para que valores de las anomalías  $M$ ,  $E$ ,  $f$ , es máximo el ángulo entre la dirección transversal y la velocidad?
- 2.- Demostrar que la anomalía  $f$  para la cual es máxima la diferencia  $f - M$ , en un movimiento elíptico, viene dada por la expresión
$$f = \arccos \left[ \frac{(1-e^2)^{3/4} - 1}{e} \right]$$
- 3.- Un cometa, que describe una órbita hiperbólica alrededor del Sol, tiene, en el perihelio, una velocidad  $q$  veces superior a la de la tierra, supuesta circular, y se encuentra a una distancia del Sol igual a  $k$  unidades astronómicas. Demostrar que las asíntotas de la hipérbola forman un ángulo  $\alpha = \arcsen [1/(q^2 k - 1)]$ .
- 4.- Supuesta circular la órbita terrestre y de radio  $a = 1$  u.a., se consideran todas las posibles órbitas parabólicas coplanarias con la terrestre, descritas por meteoritos, de distancia perihelica  $r = 1$  u.a. Calcular la velocidad máxima o mínima (en Kms/seg) relativa con que uno de estos meteoritos puede chocar con la Tierra.
- 5.- Calcular la anomalía verdadera y el radio vector de un cometa, 63,32 días después de su paso por el perihelio, si la órbita es parabólica y  $\log p = 0,34514$ .
- 6.- La masa de la Luna es  $1/81,3$  de la masa terrestre y su radio  $1/3,67$  del terrestre. Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie lunar y la velocidad de escape.
- 7.- Calcular la anomalía excéntrica y la verdadera de Marte 200 días después de su paso por el perihelio, siendo  $e = 0,09334$  y el periodo orbital de 1,8809 años.
- 8.- En un movimiento elíptico, expresar la distancia media del astro secundario con respecto al principal en función de  $a$  y  $e$ .
- 9.- En una órbita, de la que se conocen los elementos  $T = 1906,1$   $P = 60$  años,  $e = 0,75$ , calcular la anomalía excéntrica para la época 1945,3 con error inferior al segundo de arco.
- 10.- Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza paralela a  $OY$  y describe la órbita  $x y = a^2$  ¿Cuál es la intensidad de la fuerza?
- 11.- Una partícula de masa unidad se mueve en un campo de atracción newtoniano. Demostrar que, si la partícula describe una órbita elíptica, la expresión  $\dot{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) - k \mathbf{r}/r$  es una integral primera de las ecuaciones del movimiento y que este vector constante tiene por módulo  $k e$  (siendo  $e$  la excentricidad) y está orientado del foco al pericentro.
- 12.- Una cometa se encuentra a una distancia de 10 kms. del Sol y tiene una velocidad de 100 kms/seg. ¿De qué naturaleza es su órbita?
- 13.- El cometa Halley tiene un periodo de 76 años y su distancia perihélica es de 0,587 u.a. Calcular su distancia afélica y las excentricidad de su órbita.

14.- Si  $V_i$  es la velocidad en el infinito y  $q$  la distancia del perihelio, demostrar que el ángulo exterior formado por las dos asíntotas es

$$u = 2 \operatorname{arccosec} (1 + q V_i/k)$$

15.- Un satélite artificial situado en una órbita elíptica de excentricidad  $e = 0,5$  tiene un periodo de un día. Se desea conocer la velocidad de este satélite en su perigeo y su mínima distancia al centro de la Tierra.



## **II**

# **DETERMINACIÓN DE ORBITAS**

## 17. ELEMENTOS ORBITALES

Cuando se considera el movimiento kepleriano relativo de un punto  $A$ , con respecto a otro  $O$ , es fundamental conocer el número de parámetros independientes que permiten fijar la posición de  $A$  en cada instante. Claro es que el conjunto de parámetros, que depende en general del problema considerado, puede elegirse en formas muy diversas, e incluso en número suberabundante, si al propio tiempo se dan las relaciones que los ligan.

Recordemos a este respecto que, el movimiento kepleriano relativo, satisface a la ecuación vectorial (4.8) y que ésta es equivalente a las tres ecuaciones diferenciales de 2° orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2 y}{r^3} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2 z}{r^3} \quad (17.1)$$

obteniéndose así un sistema diferencial de sexto orden.

Su integración dependerá, por tanto, de seis constantes, que denominaremos parámetros o elementos orbitales.

Más adelante (estrellas dobles, por ejemplo) veremos que el valor de la constante  $K^2 = G(m_o + m)$  no siempre puede determinarse, por lo cual el número de elementos orbitales se eleva a siete.

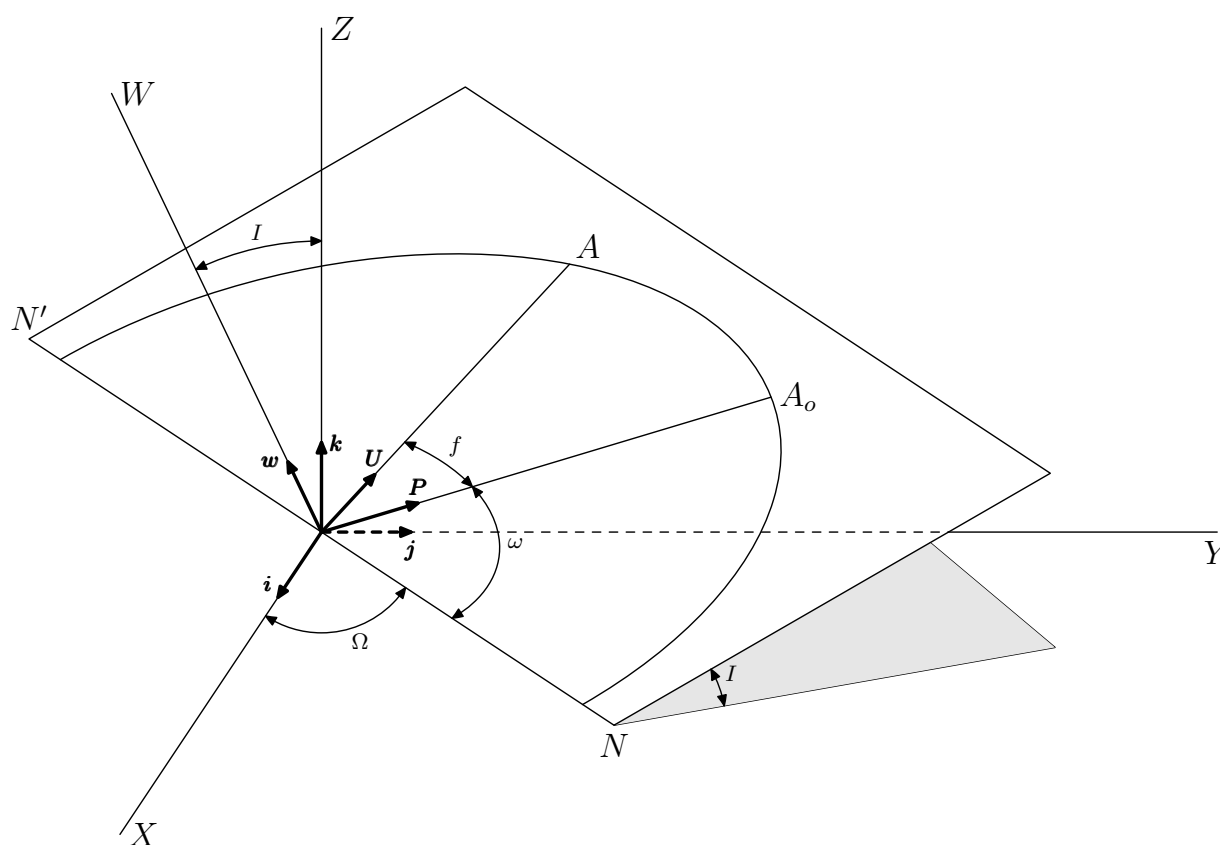


fig. 17.1



Veamos, en primer lugar, los elementos orbitales empleados con mas frecuencia. Supongamos que se trata de una órbita referida a un triedro dextrogiro fijo  $OXYZ$ , cuyo origen coincide con el astro principal (fig. 17.1).

Si el plano de la órbita no coincide con el plano  $XOY$ , cortará a éste según una recta  $NN'$ , llamada línea de los nodos y el ángulo  $\Omega = \widehat{XON}$  se denomina ángulo del nodo. La indeterminación que resulta de considerar el rayo  $ON$  o el  $ON'$ , se resuelve, en general, tomando el rayo para el cual los valores de  $z$  pasan de negativos a positivos en el sentido de recorrido orbital del satélite  $A$ .

El diedro que forman el plano  $XOY$  y el plano de la órbita, que representaremos por  $I$ , es la inclinación. Su valor deberá estar comprendido entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , para los satélites de movimiento directo (dextrogiro) y entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  para los de movimiento retrógrado (levogiro).

Evidentemente, los elementos orbitales  $\Omega, I$ , nos determinan la posición del plano de la órbita. Ahora bien, para determinar la órbita en su plano, tendremos que dar su posición y sus dimensiones. Así, para fijar la dirección del eje mayor o línea de los apsidés, suele considerarse el ángulo  $\omega = \widehat{\Omega OA}$ , llamado argumento del periastro. Como en el caso anterior, la indeterminación entre ambos vértices se elimina al elegir como punto  $A_o$  (periastro) el vértice mas próximo al foco  $O$ . Conviene advertir que el ángulo  $\omega$  se cuenta siempre desde el nodo al periastro, considerándolo como positivo en el sentido del movimiento.

Finalmente, para determinar la órbita, en sentido geométrico, bastará dar el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $e$ . En el caso parabólico, de excentricidad  $e = 1$ , puede darse la distancia  $q$ , entre el foco y el periastro, o el parámetro  $p = 2q$ .

Por lo que se refiere a los elementos dinámicos, podemos considerar la época  $T$ , o instante de paso del satélite por el periastro y la constante  $c$  de las áreas.

En el caso de un movimiento hiperbólico, en lugar de  $c$ , podemos utilizar la constante  $v$ , definida por (12.1) y en un movimiento elíptico el periodo  $P$  o el movimiento medio  $n$ , relacionados por (10.1).

Así, pues, en general son siete ( $\Omega, I, \omega, a, e, T, n$  ó  $v$ ) los elementos orbitales de un movimiento kepleriano elíptico o hiperbólico y seis ( $\Omega, I, \omega, q, T, c$ ) los de un movimiento parabólico.

No olvidemos, sin embargo, que en el caso de astros del sistema solar (planetas, asteroides, satélites, cometas, satélites artificiales, etc) el conocimiento de la constante  $k$  permite reducir a seis (o a cinco en el caso parabólico) el número de estos elementos orbitales, de ahí que, con exclusión de órbitas de estrellas dobles y algún otro caso, se consignent las constantes ( $\Omega, I, \omega, a, e, T$ ) como elementos orbitales.

En ocasiones veremos que algunas de estas constantes son sustituidas por otras, siempre y cuando el conjunto resultante esté formado por seis elementos independientes entre si, o por un número superior sujeta a ecuaciones de condición. Tal es el caso de los elementos

$$\chi = -nT \qquad \bar{\omega} = \Omega + \omega \qquad \varepsilon = \bar{\omega} + \chi \qquad (17.2)$$

y otros que señalaremos mas adelante.

## 18. SISTEMAS DE VERSORES FUNDAMENTALES

Por la frecuencia con que se utilizan en el cálculo de órbitas, nos referiremos de modo concreto a tres sistemas de versores.

**Sistema  $i, j, k$ .**:- Corresponde al sistema cartesiano ortogonal dextrogiro.

**Sistema  $p, q, w$ .**:- En este sistema, los versores  $p, q$ , definen el plano de la órbita y el versor  $w$  es perpendicular al plano de la misma. Además, el versor  $p$  corresponde a la dirección del periastro y el  $q$  es perpendicular a los anteriores, de forma que el triedro  $(p, q, w)$  es ortogonal dextrogiro.

**Sistema  $u, v, w$ .**:- Los versores  $u, v$ , que se encuentran en el plano de la órbita, son tales que  $u$  coincide con la dirección del radio vector (dirección radial) y  $v$  es perpendicular a él (dirección transversal); en tanto que  $w$  es el mismo que hemos definido en el sistema anterior. En conjunto el sistema  $(u, v, w)$  es también ortogonal dextrogiro.

Notemos que, mientras los sistemas  $(i, j, k)$ ,  $(p, q, w)$ , están formados por versores de dirección constante, en el sistema  $(u, v, w)$  los versores  $u, v$ , giran con el satélite. Por esto, a veces, conviene sustituirlos por otros  $u_o, v_o$ , correspondientes a una cierta época  $t_o$ . Por ejemplo, si  $t_o = T$ , entonces  $u_o = p, v_o = q$ .

Para ver la relación que existe entre estos sistemas, designemos las coordenadas del satélite en la forma siguiente:

$(x, y, z)$	en el sistema	$(i, j, k)$
$(\xi, \eta, 0)$	en el sistema	$(p, q, w)$
$(r, 0, 0)$	en el sistema	$(u, v, w)$

Evidentemente (fig. 17.1), para pasar del sistema de ejes  $(i, j, k)$  al sistema  $(p, q, w)$ , habrán de hacerse tres giros: uno alrededor del eje  $k$ , de argumento  $\Omega$ ; otro argumento  $I$ , alrededor de  $ON$ , y un tercero, alrededor de  $w$ , con argumento  $\omega$ . Se tiene así la relación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\text{sen } \Omega & 0 \\ \text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\text{sen } I \\ 0 & \text{sen } I & \cos I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\text{sen } \omega & 0 \\ \text{sen } \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

Efectuando el producto de las tres matrices que intervienen en (18.1) y designando por  $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, w_1, w_2, w_3$ , los componentes de dicho producto, se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & w_1 \\ p_2 & q_2 & w_2 \\ p_3 & q_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.2)$$

donde

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos \Omega \cos \omega - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega \cos I \\ p_2 &= \operatorname{sen} \Omega \cos \omega + \cos \Omega \operatorname{sen} \omega \cos I \\ p_3 &= \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} I \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\cos \Omega \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \Omega \cos \omega \cos I \\ q_2 &= -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega - \cos \Omega \cos \omega \cos I \\ q_3 &= \cos \omega \operatorname{sen} I \end{aligned} \quad (18.4)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} I \\ w_2 &= -\cos \Omega \operatorname{sen} I \\ w_3 &= \cos I \end{aligned} \quad (18.5)$$

Entre estos nueve componentes existen las bien conocidas relaciones

$$\begin{aligned} |p| &= 1 & |q| &= 1 & |w| &= 1 \\ p \cdot q &= 0 & p \cdot w &= 0 & q \cdot w &= 0 \end{aligned} \quad (18.6)$$

Por otra parte, si el tercer giro alrededor de  $w$ , que hemos citado anteriormente, lo efectuamos con el argumento

$$u = \omega + f \quad (18.7)$$

donde  $f$  designa como siempre la anomalía verdadera, resultará

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (18.8)$$

con análoga expresión para  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ , sin más que sustituir  $\omega$  por  $u$  en (18.3), (18.4), y con idéntica expresión para  $w_1, w_2, w_3$ , según (18.5). Es decir

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \Omega \cos u - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} u \cos I \\ u_2 &= \operatorname{sen} \Omega \cos u + \cos \Omega \operatorname{sen} u \cos I \\ u_3 &= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} I \end{aligned} \quad (18.9)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -\cos \Omega \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} \Omega \cos u \cos I \\ v_2 &= -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} u - \cos \Omega \cos u \cos I \\ v_3 &= \cos u \operatorname{sen} I \end{aligned} \quad (18.10)$$

La relación entre los sistemas  $(p, q, w)$  y  $(u, v, w)$  se obtiene fácilmente por medio de un giro de argumento  $f$  alrededor de  $w$ . Así resulta

$$\xi = r \cos f \quad \eta = r \operatorname{sen} f \quad (18.11)$$

Finalmente, si designamos por  $(\xi, \eta, 0)$  las coordenadas en un sistema  $(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}_o, \mathbf{w}_o)$ , definido para un instante  $t_o$ , y es  $f_o$  la anomalía verdadera correspondiente, se verificará

$$\xi_o = r \cos(f - f_o) \qquad \eta_o = r \operatorname{sen}(f - f_o) \qquad (18.12)$$

Otras relaciones fáciles de comprobar son las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_o \cos(f - f_o) + \mathbf{v}_o \operatorname{sen}(f - f_o) \\ \mathbf{v} &= -\mathbf{u}_o \operatorname{sen}(f - f_o) + \mathbf{v}_o \cos(f - f_o) \end{aligned} \qquad (18.13)$$

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{p} + \eta \mathbf{q} = r \mathbf{u} = \xi_o \mathbf{u}_o + \eta_o \mathbf{v}_o \qquad (18.14)$$

## 19. VARIABLES Y CONSTANTES ORBITALES

Al referirnos a los elementos orbitales en el párrafo 17, hemos citado un conjunto de seis constantes del movimiento kepleriano, cuyo conocimiento permite el cálculo de posiciones del satélite.

De este modo, para cada instante  $t$ , las coordenadas  $(x, y, z)$  y las componentes  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  de la velocidad se pueden expresar por medio de ciertas funciones

$$\begin{aligned} x &= x(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) & \dot{x} &= \dot{x}(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) \\ y &= y(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) & \dot{y} &= \dot{y}(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) \\ z &= z(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) & \dot{z} &= \dot{z}(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) \end{aligned}$$

o abreviadamente

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, a, e, T, \Omega, \omega, I) \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, a, e, T, \Omega, \omega, I)$$

Es evidente, sin embargo, que la integración del sistema diferencial (17.1) nos conduce también a una solución del tipo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_o, \dot{\mathbf{r}}_o) \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_o, \dot{\mathbf{r}}_o)$$

por lo cual podríamos emplear las componentes  $(x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$ , correspondientes a una época  $t_o$ , como elementos orbitales.

Extendiendo un tanto estas consideraciones, en lugar de referirnos a seis constantes independientes cualesquiera  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$  podemos elegir seis variables independientes, por ejemplo  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  y utilizarlas como elementos orbitales, bien entendido que para un movimiento kepleriano habrán de ser tomadas para un instante prefijado. Esta forma de proceder, no solo está justificada por los párrafos anteriores, sino por el hecho de que en las órbitas perturbadas, estos elementos (constantes en el movimiento kepleriano) varían con el tiempo (método de variación de las constantes). Así pues, en lo sucesivo denominaremos elementos orbitales a un conjunto de seis parámetros independientes, ya sean constantes, variables o mezcla de ambas, o a un conjunto de  $n$  ( $> 6$ ) parámetros, ligados por  $n - 6$  ecuaciones de condición.

Entre los conjuntos de seis elementos independientes más empleados podemos citar los siguientes:

$I1 : (a, e, T, \Omega, \omega, I)$	elementos orbitales ordinarios
$I2 : (L, G, H, l, g, h)$	variables de Delaunay
$I3 : (R, U, H, r, u, h)$	variables de Hill
$I4 : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	coordenadas de un punto su velocidad
$I5 : (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$	coordenadas de dos puntos

Concretándonos al conjunto de elementos  $I1$ , digamos que, aparte las sustituciones mencionadas en las fórmulas (17.2), es frecuente usar las constantes  $h$  (integral de la energía) y  $c$  (constante de las áreas), en lugar de los elementos  $a, e$ . Basta recordar las relaciones (5.7), (6.5), (6.6) y (6.9).

Notemos también que, el conocimiento de una cualquiera de las anomalías, es equivalente a la época de paso por el periastro, en virtud de las fórmulas (9.2) del movimiento parabólico, las (10.7), (10.8), (10.11) del elíptico y las (12.5), (12.8) del hiperbólico.

Esta equivalencia entre la época de paso por el periastro y una de las anomalías, puede ser extendida al par de elementos  $(e, T)$ . Tal es el caso de las variables

$$C = e \cos E \qquad S = e \sin E \qquad (19.1)$$

empleadas en el movimiento elíptico.

El sistema de variables de Delaunay, válido para el movimiento elíptico o hiperbólico, está definido por las relaciones

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{a} & l &= M \\ G &= 2c & g &= \omega \\ H &= 2c_3 = G \cos I & h &= \Omega \end{aligned} \qquad (19.2)$$

donde  $c_3 = c \cos I$  representa la proyección del vector  $\mathbf{c}$  sobre el eje  $OZ$  y  $M$  la anomalía media igual a  $k(t - T)/a^{3/2}$ . La razón de emplear diferentes letras para elementos orbitales ya definidos, reside en la forma canónica que dan estas variables a las ecuaciones del movimiento perturbado, con lo cual se consigue una gran simetría de formulación.

Con análogo criterio son utilizadas las variables HILL, cuya definición es la siguiente:

$$\begin{aligned} R &= dr/dt & r &= \text{radio vector} \\ U &= G = 2c & u &= \omega + f \\ H &= 2c_3 & h &= \Omega \end{aligned} \qquad (19.3)$$

Estas variables se relacionan fácilmente con las coordenadas cartesianas de un punto y la velocidad. En efecto, basta hacer uso de la fórmula (18.8), la ley de las áreas, la expresión de la velocidad (en sus componentes cartesianas o radial y transversal) y la igualdad  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r \dot{r}$ .

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x &= r \left[ \cos u \cos h - \frac{H}{U} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} h \right] & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= R^2 + \frac{U^2}{r^2} \\
 y &= r \left[ \cos u \operatorname{sen} h + \frac{H}{U} \operatorname{sen} u \cos h \right] & x \dot{y} - y \dot{x} &= H \\
 z &= r \sqrt{1 - (H/U)^2} \operatorname{sen} u & x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z} &= R r
 \end{aligned} \tag{19.4}$$

En el caso de sistemas con elementos no independientes, ya se comprende que el número de combinaciones puede llegar a ser muy grande. Esto nos obliga a limitarnos a unos cuantos sistemas de frecuente uso:

$$D1 : (a, e, T, p, q, w)$$

$$D2 : (a, e, f, u, v, w)$$

$$D3 : (a, C, S, u, v, w)$$

$$D4 : (T, h, e, c)$$

$$h = \text{integral de la energía}$$

En cada uno de los sistemas  $D1$ ,  $D2$ ,  $D3$ , existen 12 componentes, entre los que hay 6 relaciones del tipo (18.6) o sus análogas para los versores  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ . El sistema  $D4$  definido por los 8 componentes  $(T, h, e_1, e_2, e_3, c_1, c_2, c_3)$ , presenta la ventaja de que éstos (con excepción de  $T$ ) se pueden expresar por fórmulas vectoriales, lo que simplifica notablemente algunas deducciones. En efecto se tiene:

$$h = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{k^2}{\sqrt{r^2}} \qquad 2 \mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{e} = 2 \frac{\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{c}}{k^2} - \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{19.5}$$

El vector  $\mathbf{e}$ , cuya expresión se deduce de la fórmula (5.3), está dirigido hacia el periastró y tiene módulo  $e$ .

Señalemos, finalmente, las ecuaciones de condición que relacionan estos parámetros

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0 \qquad e^2 = 1 + 8h \frac{c^2}{k^4} \tag{19.6}$$

Por su importancia en la aplicación de los métodos de cálculo de órbitas de Laplace y Gauss, pospondremos el estudio de los sistemas  $I4$ ,  $I5$ , a los párrafos siguientes.

## 20. DETERMINACIÓN DE UN ÓRBITA POR LOS VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Suponiendo conocidos los vectores  $\mathbf{r}(x, y, z)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , tratemos de hallar los elementos orbitales ordinarios.

En primer lugar tendremos

$$r = |\mathbf{r}| \quad v = |\dot{\mathbf{r}}| \quad \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r} \quad (20.1)$$

de donde se deducen  $h$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{e}$  por las fórmulas (19.5), y por consiguiente

$$c = |\mathbf{c}| \quad e = |\mathbf{e}| \quad (20.2)$$

Según se obtenga  $h \geq 0$ , o bien  $e \geq 1$ , la órbita será respectivamente hiperbólica, parabólica o elíptica; pero, en cualquier caso, el parámetro  $p$  se calcula fácilmente por la igualdad (5.7) y el semieje mayor (en los casos hiperbólico y elíptico) por las fórmulas (6.5)

Con esto, el cálculo de los versores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , es inmediato, pues se tiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}/r \quad \mathbf{w} = \mathbf{c}/c \quad \mathbf{v} = \mathbf{W} \wedge \mathbf{u} \quad (20.3)$$

y la anomalía verdadera  $f$ , se deducirá sin ambigüedad por las dos igualdades:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = e \cos f \quad -\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = e \sin f \quad (20.4)$$

Para terminar el cálculo, recordemos las fórmulas (18.5)

$$w_1 = \sin \Omega \sin I \quad w_2 = -\cos \Omega \sin I \quad w_3 = \cos I \quad (20.5)$$

y observemos que la tercera nos determina  $I$ , indicándonos, según el signo de  $w_3$ , si el movimiento es directo o retrógrado; es decir, si debe tomarse  $I$  en el primero o segundo cuadrante. Por otra parte, siendo  $\sin I \geq 0$ , las dos primeras igualdades nos permiten fijar  $\Omega$ .

De idéntica manera, las últimas igualdades (18.9) y (18.10), esto es

$$u_3 = \sin u \sin I \quad v_3 = \cos u \sin I \quad (20.6)$$

nos determinan  $u = \omega + f$ , con lo cual el elemento  $w$  es calculado fácilmente.

## 21. DETERMINACIÓN DE UNA ÓRBITA POR DOS VECTORES DE POSICIÓN. SOLUCIÓN DE GAUSS

Supongamos ahora conocidos dos vectores de posición del satélite,  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ , de acuerdo con el sistema  $I5$ , y tratemos de obtener los elementos de la órbita correspondiente. Tendremos en primer término

$$r_1 = |\mathbf{r}_1| \quad r_2 = |\mathbf{r}_2| \quad (21.1)$$

de donde se deducen los versores  $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w})$ ,  $(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w})$ , correspondientes a las posiciones  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , por intermedio de las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} & \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{r}_1/r_1 & \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}^{(1)} \\ & & \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{r}_2/r_2 & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}^{(2)} \end{aligned} \quad (21.2)$$

Las componentes  $w_1, w_2, w_3$ , del versor  $\mathbf{w}$ , igual para ambos, nos servirán para determinar los elementos  $\Omega, I$ , como quedó explicado en el párrafo anterior. Las terceras componentes  $u_3^{(1)}, v_3^{(2)}, u_3^{(2)}, v_3^{(1)}$ , una vez calculada la inclinación, se pueden escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(f_1 + \omega) &= u_3^{(1)} / \operatorname{sen} I & \operatorname{sen}(f_2 + \omega) &= u_3^{(2)} / \operatorname{sen} I \\ \operatorname{cos}(f_1 + \omega) &= v_3^{(1)} / \operatorname{sen} I & \operatorname{cos}(f_2 + \omega) &= v_3^{(2)} / \operatorname{sen} I\end{aligned}\quad (21.3)$$

de donde

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(f_2 + f_1) &= (u_3^{(2)} v_3^{(1)} - u_3^{(1)} v_3^{(2)}) / \operatorname{sen}^2 I \\ \operatorname{cos}(f_2 - f_1) &= (v_3^{(1)} v_3^{(2)} + u_3^{(1)} u_3^{(2)}) / \operatorname{sen}^2 I\end{aligned}\quad (21.4)$$

Con esto el problema se reduce a la determinación de los elementos  $(a, e, T, w)$  a partir de los datos  $(r_1, t_1), (r_2, t_2)$  y la diferencia  $(f_2 - f_1)$ , o bien de acuerdo con las fórmulas (13.11), (13.12), (13.13), (13.14), a la resolución del sistema de ecuaciones

$$\sqrt{r_1 r_2} \operatorname{sen} V = \sqrt{p a} \operatorname{sen} g \quad (21.5)$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V = a (\operatorname{cos} g - e \operatorname{cos} G) \quad (21.6)$$

$$k \tau / a^{3/2} = 2 (g - e \operatorname{cos} G \operatorname{sen} g) \quad (21.7)$$

$$r_2 + r_1 = 2 a (1 - e \operatorname{cos} G \operatorname{cos} g) \quad (21.8)$$

donde se ha puesto para abreviar

$$2 g = E_2 - E_1 \quad (21.9) \quad 2 G = E_2 + E_1 \quad (21.10)$$

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (21.11) \quad 2 V = f_2 - f_1 \quad (21.12)$$

Despejando el término  $e \operatorname{cos} G$  en (21.6) y sustituyéndolo en (21.7), (21.8), después de sencillas simplificaciones, resulta

$$\frac{k \tau}{(a \operatorname{sen}^2 g)^{3/2}} = \frac{2 g - \operatorname{sen} 2 g}{\operatorname{sen}^3 g} + \frac{2 \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V}{a \operatorname{sen}^2 g} \quad (21.13)$$

$$r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V \operatorname{cos} g = 2 a \operatorname{sen}^2 g \quad (21.14)$$

Finalmente, eliminando el término  $\sqrt{a} \operatorname{sen} g$ , entre (21.5) y estas dos, se llega al sistema de ecuaciones

$$\frac{k \tau p^{3/2}}{(r_1 r_2 \operatorname{sen}^2 V)^{3/2}} = \frac{2 g - \operatorname{sen} 2 g}{\operatorname{sen}^3 g} + \frac{2 p \operatorname{cos} V}{\sqrt{r_1 r_2} \operatorname{sen}^2 V} \quad (21.15)$$

$$r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2}\right) = 2 r_1 r_2 p^{-1} \operatorname{sen}^2 V \quad (21.16)$$

Para resolver este sistema, Gauss introduce dos cantidades  $m, q$ , dadas por las relaciones

$$m = \frac{k^2 \tau^2}{(2 \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V)^3} \quad q = \frac{1}{2} \left[ \frac{r_1 + r_2}{2 \sqrt{r_1 r_2} \operatorname{cos} V} - 1 \right] \quad (21.17)$$



y una nueva variable  $y$ , que representa el cociente entre las áreas del sector y el triángulo correspondiente a los vectores  $r_1, r_2$ . Su expresión viene definida en cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$y = \frac{k \tau}{2 \sqrt{a} \sqrt{r_1 r_2} \cos V \operatorname{sen} g} = \frac{k \tau \sqrt{p}}{r_1 r_2 \operatorname{sen}(2 V)} \quad (21.18)$$

De esto modo, multiplicando la (21.15) por  $m$  y dividiendo la (21.16) por  $2 \sqrt{r_1 r_2} \cos V$ , se obtienen las siguientes ecuaciones fundamentales de Gauss

$$y^3 - y^2 = m \frac{2g - \operatorname{sen}(2g)}{\operatorname{sen}^3 g} = m X \quad y^2 = \frac{m}{q + \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2}} = \frac{m}{q + x} \quad (21.19)$$

donde se ha puesto

$$X = (2g - \operatorname{sen}(2g))/\operatorname{sen}^3 g \quad x = \operatorname{sen}^2 \frac{g}{2} \quad (21.20)$$

La resolución del sistema (21.19) imaginada por Gauss, consiste en el siguiente proceso: Derivemos la primera fórmula (21.20) con respecto a  $g$ , esto es

$$3 X \operatorname{sen}^2 g \cos g + \operatorname{sen}^3 g \frac{dX}{dg} = 2(1 - \cos 2g) = 4 \operatorname{sen}^2 g \quad (21.21)$$

de donde

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dg} \frac{dg}{dx} = \frac{8 - 6 X \cos g}{\operatorname{sen}^2 g} = \frac{4 - 3 X (1 - 2x)}{2x(1-x)} \quad (21.22)$$

Esta ecuación diferencial puede ser integrada por desarrollo en serie y el resultado obtenido, es

$$X = \frac{4}{3} \left[ 1 + \frac{6}{5} x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7} x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \dots \right] \quad (21.23)$$

Por tanto, introduciendo unas cantidades auxiliares  $\xi, h$ , por medio de las igualdades

$$X = \frac{4}{3} / \left( 1 - \frac{6}{5} (x - \xi) \right) \quad (21.24) \quad h = m / \left( \frac{5}{6} + q + \xi \right) \quad (21.25)$$

se tiene

$$1 - \frac{6}{5} (x - \xi) = \frac{4}{3X} = 1 - \frac{6}{5} x + \frac{12}{175} x^2 + \frac{312}{7875} x^3 + \dots$$

de donde

$$\xi = \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \dots \quad (21.26)$$

Según esto, la primera ecuación (21.19) se podrá escribir en la forma

$$y^3 - y^2 = \frac{10 m/9}{\frac{5}{6} + \xi - x} = \frac{10 h/9}{1 - \frac{h}{y^2}} \quad (21.27)$$

quedando finalmente el sistema

$$y^3 - y^2 - h y - \frac{h}{9} = 0 \quad (21.28) \quad x = \frac{m}{y^2} - q \quad (21.29)$$

que permite resolver el problema como veremos ahora

**Proceso de cálculo.-** La secuencia de fórmulas a seguir puede ser la siguiente: (21.17), (21.26), (21.25), (21.28), (21.29).

En general, una vez obtenidos los valores de  $m$  y  $q$ , que se deducen de las fórmulas (21.17) para los datos consignados, se pone  $\xi = 0$  y se calculan  $h, y, x$ , por las expresiones (21.25), (21.28) y (21.29). Con el valor de  $x$  que resulta, se vuelve a repetir la secuencia de fórmulas (21.26), (21.25), (21.28), (21.29) y se obtiene un valor más aproximado de  $x$ . De esta forma se puede reiterar la sucesión de cálculos mencionada, hasta que el error cometido en  $x$  sea suficientemente pequeño. También puede partirse un valor inicial  $x = m - q$ , en el que se ha supuesto  $y \sim 1$ , de acuerdo con su significado geométrico.

Los cálculos se simplifican si se tiene en cuenta que las funciones  $\xi = \xi(x)$ ,  $y = y(h)$ , dadas por las fórmulas (21.26) y (21.28), han sido tabuladas por diversos autores.

Para terminar este párrafo, hagamos algunas aclaraciones sobre la manera de calcular los elementos  $(a, e, T, w)$ . En primer lugar, observemos que las expresiones

$$\cos g = 1 - 2x \quad \text{sen } g = \sqrt{4x(1-x)} \quad (21.30)$$

sirven para precisar el cuadrante del ángulo  $E_2 - E_1 = 2g$ , y la fórmula (21.18) para reducir los valores de  $p$  y  $a$ , o bien los elementos  $a, e$ .

Asimismo, de las fórmulas (13.14) y (13.15), se deducen fácilmente las igualdades

$$e \cos G = \frac{2a - (r_2 + r_1)}{2a \cos g} \quad e \text{ sen } G = \frac{r_2 - r_1}{2a \text{ sen } g} \quad (21.31)$$

que permiten determinar el ángulo  $G = (E_2 + E_1)/2$  sin ambigüedad y por tanto

$$E_1 = G - g \quad E_2 = G + g \quad (21.32)$$

El cálculo de los elementos  $T, \omega, \Omega, I$ , se concluye fácilmente por medio de la ecuación de Kepler y las fórmulas (21.1), (21.2) y (21.3) mencionadas al comienzo de este párrafo.

Otra forma de resolver este problema consiste en eliminar el término  $a \text{ sen}^2 g$  entre las ecuaciones (21.13) y (21.14). La fórmula que se obtiene puede expresarse así

$$g - \left[ \frac{\cos g - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos g} \right] \text{ sen } g = \frac{B \text{ sen}^3 g}{(1 - \varepsilon \cos g)^{3/2}} \quad (21.33)$$

donde las cantidades *varepsilon*,  $B$  tienen el siguiente significado

$$\varepsilon = \frac{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos V}{r_1 + r_2} \quad (|\varepsilon| \leq 1) \quad B = \frac{k \tau \sqrt{2}}{(r_1 + r_2)^{3/2}} \quad (21.34)$$

Como vemos, la tabulación de  $B$ , para pares de valores  $(\varepsilon, g)$  es relativamente sencilla en la forma

$$B = \left( \frac{1 - \varepsilon \cos g}{\sin^2 g} \right)^{3/2} \left[ g - \left( \frac{\cos g - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos g} \right) \sin g \right] \quad (21.35)$$

con lo cual resulta fácil el cálculo de un valor aproximado de  $g$ , sin tener que recurrir al más complejo esquema ideado por Gauss. Debe observarse, además, que esta fórmula y las de Gauss carecen de sentido para  $g = 0^\circ$  y  $g = 180^\circ$ , como se desprende de las eliminaciones efectuadas.

## 22. DETERMINACIÓN DE UNA ÓRBITA POR CUATRO DIRECCIONES FOCALES

Cuando se dispone de datos (de observación o cálculo) referidos al plano de la órbita, los elementos necesarios para su determinación quedan reducidos a cuatro, toda vez que ya se suponen conocidos los elementos  $\Omega, I$ .

Es por esto que, en coordenadas polares planas  $(r, \theta)$ , aparte el caso ya mencionado de Gauss, la combinación de datos más importante a considerar es la que contiene cuatro ángulos y una distancia. Es decir

$$(\theta_1, t_1), \quad (\theta_2, t_2), \quad (\theta_3, t_3), \quad (\theta_4, t_4)$$

Su resolución depende de la obtención de algunas ecuaciones auxiliares que desarrollaremos en primer término, ajustando las notaciones a las del apartado 13 y teniendo presente las igualdades

$$2 V_{ik} = f_k - f_i = \theta_k - \theta_i$$

Escribiendo la ecuación (13.11) para los pares de índices  $(i, j)$ ,  $(i, k)$ ,  $(j, k)$ ,  $(j, l)$  y combi-nándolas por división, se obtiene una primera ecuación independiente de las distancias

$$\frac{\sin g_{ik} \sin g_{jl}}{\sin g_{ij} \sin g_{kl}} = \frac{\sin V_{ik} \sin V_{jl}}{\sin V_{ij} \sin V_{kl}} \quad (22.1)$$

Otra ecuación de este mismo tipo se obtiene por eliminación de las distancias y el semieje entre la ecuación de Thiele (13.17) y la ecuación (13.11) elevada al cuadrado

$$n T_{ik} - F(g_{ik}) = \frac{r_i r_k \sin(2 V_{ik})}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = 2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{ctg} V_{ik} \sin^2 g_{ik} \quad (22.2)$$

donde se ha puesto

$$F(g_{ik}) = 2 g_{ik} - \sin(2 g_{ik}) \quad (22.3)$$

Escribiendo la ecuación (22.2) para los pares de índices  $(i, j)$ ,  $(j, k)$ ,  $(i, k)$ , resulta como condición de compatibilidad la siguiente

$$\begin{vmatrix} T_{ij} & F(g_{ij}) & \operatorname{ctg} V_{ij} \sin^2 g_{ij} \\ T_{jk} & F(g_{jk}) & \operatorname{ctg} V_{jk} \sin^2 g_{jk} \\ T_{ik} & F(g_{ik}) & \operatorname{ctg} V_{ik} \sin^2 g_{ik} \end{vmatrix} = 0 \quad (22.4)$$

que expresa una relación entre tres ángulos y las épocas correspondientes, con independencia de las distancias.

De acuerdo con el formulario anterior, el planteamiento del caso mencionado se reduce a poner  $x = g_{12}$ ,  $y = g_{23}$ ,  $z = g_{34}$ , en la ecuación (22.1) y las correspondientes a las ternas (123), (234), en la (22.4).

El sistema será, pues,

$$\frac{\text{sen}(x+y) \text{sen}(y+z)}{\text{sen } x \text{sen } z} = \frac{\text{sen } V_{13} \text{sen } V_{24}}{\text{sen } V_{12} \text{sen } V_{34}}$$

$$\begin{vmatrix} T_{12} & F(x) & \text{ctg } V_{12} \text{sen}^2 x \\ T_{23} & F(y) & \text{ctg } V_{23} \text{sen}^2 y \\ T_{13} & F(x+y) & \text{ctg } V_{13} \text{sen}^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} T_{23} & F(y) & \text{ctg } V_{23} \text{sen}^2 y \\ T_{34} & F(z) & \text{ctg } V_{34} \text{sen}^2 z \\ T_{24} & F(y+z) & \text{ctg } V_{24} \text{sen}^2(y+z) \end{vmatrix} = 0$$

y aunque la resolución de este sistema en las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  solamente podrá ser llevada a cabo por métodos numéricos, se comprende la importancia que puede tener en algunos problemas astronómicos, donde se desconoce muy frecuentemente las distancias. Una vez calculadas las incógnitas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , la fórmula (22.2) permite escribir las igualdades

$$\frac{n T_{12} - F(x)}{\text{ctg } V_{12} \text{sen}^2 x} = \frac{n T_{23} - F(y)}{\text{ctg } V_{23} \text{sen}^2 y} = \frac{n T_{34} - F(z)}{\text{ctg } V_{34} \text{sen}^2 z} = 2 \sqrt{1 - e^2}$$

de las que se deduce fácilmente el movimiento medio  $n$ , y la excentricidad  $e$ , así como el semieje por medio de la relación  $k^2 = n^2 a^3$ .

Por otra parte, la expresión (13.11) puede ser aplicada a los pares de índices  $(i, k)$ ,  $(i, j)$ ,  $(j, k)$ , de donde resulta

$$r_j \frac{\text{sen } V_{ij} \text{sen } V_{jk}}{\text{sen } V_{ik}} = a \sqrt{1 - e^2} \frac{\text{sen } g_{ij} \text{sen } g_{jk}}{\text{sen } g_{ik}} \quad (22.5)$$

Esta ecuación sirve, por tanto, para calcular  $r_2$ ,  $r_3$ , a través de las ternas (123), (234), y los restantes elementos se pueden obtener del mismo modo que en el apartado anterior.

## 23. DATOS DE OBSERVACIÓN Y EFEMÉRIDES

Las cuestiones más importantes que encierra el cálculo de órbitas pueden reducirse a dos:

- a) Determinación de órbitas

b) Cálculo de efemérides

La primera puede referirse: A la determinación de una órbita ya existente, por medio de un cierto número de datos de observación, o al cálculo de una órbita que satisfaga las existencias impuestas por el lanzamiento de un vehículo espacial.

Por el contrario, el cálculo de efemérides consiste en la determinación de posiciones futuras (o pasadas) del astro satélite, cuya observación servirá por contraste para el perfeccionamiento de la órbita calculada.

Se comprende, por esto, la variedad de problemas que pueden presentarse, según los tipos de observación empleados o las clases de órbitas existentes, de donde se deduce la imposibilidad de abordarlos aquí con carácter exhaustivo.

Los tipos más clásicos de observación son los visuales o fotográficos, por lo cual no es de extrañar el desarrollo que han tenido los métodos de cálculo de órbitas basados en el conocimiento exclusivo de direcciones o ángulos. Posteriormente, desde el lanzamiento de satélites artificiales, se han utilizado otros procedimientos de observación tales como medidas con radar, rayos laser, medidas Doppler, etc., que en algunos casos implican el conocimiento de distancias; de ahí el estudio reciente de otros métodos o variantes a los clásicos basados en estos tipos de observaciones.

Algo análogo puede decirse en relación con los recursos de cálculo. En efecto, si en los métodos clásicos, la resolución de un determinado problema implicaba una reducción a cálculo logarítmico o tabulación de funciones, en la actualidad numerosos pasos se resuelven por iteración, de acuerdo con las posibilidades de los ordenadores electrónicos.

Concretándonos en este párrafo a dar ligeras indicaciones sobre los datos de observación y el cálculo de efemérides, consideremos un punto  $P$  de masa  $m$ , que se mueve con relación a un punto  $O$ , de masa  $m_o$ , en una órbita de elementos  $(a, e, T, \Omega, \omega, I)$ . Supongamos que  $P$  es observado desde un punto  $A$  y designemos por  $\mathbf{p}, \mathbf{R}, \mathbf{r}$  los vectores

$$\mathbf{p}(\xi, \eta, \zeta) = \overrightarrow{AP} \quad \mathbf{R}(X, Y, Z) = \overrightarrow{AO} \quad \mathbf{r}(x, y, z) = \overrightarrow{OP}$$

Entonces, dado un instante  $t$ , el formulario

$$\begin{aligned} G(m + m_o) &= n^2 a^3 & M &= n(t - T) \\ E - e \operatorname{sen} E &= M & \operatorname{tag} \frac{f}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tag} \frac{E}{2} \\ u &= f + \omega & r &= a(1 - e^2)/(1 + e \cos f) \\ x &= r(\cos \Omega \cos u - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} u \cos I) \\ y &= r(\operatorname{sen} \Omega \cos u - \cos \Omega \operatorname{sen} u \cos I) \\ z &= r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} I \end{aligned}$$

se utiliza el cálculo sucesivo de  $n, M, E, f, u, r, x, y, z$ .

Naturalmente, en el caso de una órbita hiperbólica o parabólica, el formulario para el cálculo de la anomalía verdadera  $f$  deberá ser modificado según lo dicho en los apartados 9 y 12 de este curso.

Una vez calculada las coordenadas  $(x, y, z)$  del vector  $\mathbf{r}$ , u otras cualesquiera (eclípticas, ecuatoriales, etc.), será necesario pasar a las coordenadas propias del lugar de observación.

En este sentido, los casos que se presentan con más frecuencia son los siguientes:

- A. Órbita de un satélite artificial, que se mueve con relación al centro de gravedad terrestre y es observado desde un punto de su superficie.
- B. Órbita de un planeta (asteroide o cometa), que se mueve con relación al Sol y es observado desde un punto de la superficie terrestre.

En el primer caso, será necesario efectuar una traslación para pasar de coordenadas geocéntricas a topocéntricas; en el segundo, dos traslaciones, una de coordenadas heliocéntricas a geocéntricas y otra de coordenadas geocéntricas a topocéntricas. Los resultados obtenidos serán las efemérides o posiciones calculadas.

En principio parece que las coordenadas obtenidas deberían coincidir con las observadas. Pero tal cosa no sucede por las siguientes causas:

1. Errores propios de la observación.
2. Cambios del sistema de referencia.
3. Deficiente estimación de los elementos orbitales.

La primera obliga a preparar las observaciones corrigiéndolas de errores instrumentales y en ocasiones de refracción y aberración.

La segunda supone la reducción de las observaciones a un equinoccio fijo (precesión y nutación).

Finalmente, si suponemos corregidas las observaciones y calculadas las efemérides, las diferencias entre ambas o diferencias observación-cálculo, se deberán principalmente a una deficiente estimación de los elementos orbitales. Como veremos más adelante, dichas diferencias pueden servir de base para mejorar los elementos orbitales adoptados.

En adición a esto, notemos que los tipos A y B de órbitas (de satélites artificiales o planetarias) se reducen a un mismo problema triangular cuando se desprecia, en el caso B, el error cometido al observar desde un punto de la superficie terrestre y no desde el centro de la Tierra. Por esto, en los métodos que siguen, se prescindirá, en principio, de este error de paralaje.

En la práctica, el cálculo de estas órbitas se efectúa en dos fases: una primera en la que se consideran los datos de observación como geocéntricos, llegando a un conocimiento aproximado de la distancia  $\rho$ , y una segunda aproximación en la que se repiten los cálculos, después de corregir los datos topocéntricos observados de paralaje diurna y aberración planetaria.

Advirtamos que, en general, las observaciones publicadas suelen estar corregidas de errores de observación (instrumentales, refracción y aberración) y referidos a un equinoccio medio. Incluso es frecuente presentarlos corregidos de paralaje y aberración planetaria, cuando se conoce una órbita previa. Si es así, la preparación de observaciones se limitará a reducirlas a un equinoccio fijo (precesión).

La índole teórica de nuestro curso no nos permite extendernos más en estas cuestiones, que pueden ser estudiadas con minuciosidad en el curso de Astronomía o en cualquier obra dedicada al cálculo de órbitas (Vease, por ejemplo, A.D. Dubyago, *The Determination of Orbits*, MacMillan Comp. New York, 1961).

## 24. OBTENCIÓN DE UNA ÓRBITA PRELIMINAR CON DATOS ANGULARES. MÉTODO DE LAPLACE.

Como ya quedó indicado, las observaciones visuales y fotográficas, han sido, durante muchos años, las únicas empleadas en las determinaciones de posición. Las técnicas utilizadas, que no vamos a describir aquí, consisten en referir la posición del astro observado a la de un cierto número de estrellas próximas, de coordenadas celestes conocidas (Veanse en nuestro curso de astronomía los epígrafes: Anteojo ecuatorial y fotografía astronómica). De esta forma, cada observación nos proporciona un par de coordenadas angulares tales como ascensión recta y declinación, longitud y latitud eclípticas, acimut y distancia cenital, etc.

Por eso, en el método de Laplace y también en el de Gauss, supondremos conocidas tres observaciones del tipo  $(\alpha_1, \delta_1, t_1)$ ,  $(\alpha_2, \delta_2, t_2)$ ,  $(\alpha_3, \delta_3, t_3)$ , que son necesarias para el cálculo de los seis elementos orbitales. No insistiremos sobre la posibilidad de utilizar cualquier otro sistema de coordenadas celestes, por creer que las transformaciones de coordenadas astronómicas han sido suficientemente estudiadas.

**Método de Laplace.-** Sea  $P_o$  el astro principal, con respecto al cual el punto  $P$  describe una órbita kepleriana, que es observada desde un punto  $O$  (observatorio).

Designemos por  $\rho$ ,  $R$ ,  $r$  los vectores

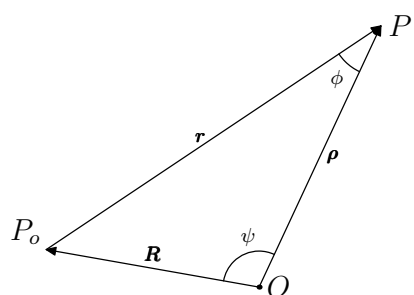


fig. 24.1

$$\rho = \overrightarrow{OP}, \quad R = \overrightarrow{OP_o}, \quad r = \overrightarrow{P_oP}$$

y por  $\phi$ ,  $\psi$ , los ángulos  $\widehat{OPP_o}$ ;  $\widehat{P_oOP}$ .

Entonces, si  $L$  representa el versor de dirección  $\overrightarrow{OP}$ , tendremos  $\rho = \rho L$ .

Evidentemente, en un sistema de coordenadas ecuatoriales (ascensión recta y declinación), las componentes cartesianas

de  $L$  serán

$$L_1 = \cos \delta \cos \alpha \quad L_2 = \cos \delta \sin \alpha \quad L_3 = \sin \delta \quad (24.1)$$

y se verificará la relación fundamental.

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{L} - \mathbf{R} \quad (24.2)$$

Derivando dos veces esta expresión, con respecto al tiempo, obtendremos

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{L} + \rho \dot{\mathbf{L}} - \dot{\mathbf{R}} \quad (24.3) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} \mathbf{L} + 2 \dot{\rho} \dot{\mathbf{L}} + \rho \ddot{\mathbf{L}} - \ddot{\mathbf{R}} \quad (24.4)$$

Además, por hipótesis, el astro  $P$  se mueve con relación al  $P_o$  en una órbita kepleriana, luego

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{k^2 (\rho \mathbf{L} - \mathbf{R})}{r^3} \quad (24.5)$$

Sustituyendo esta igualdad en (24.4), resulta

$$\left[ \ddot{\rho} + \frac{k^2 \rho}{r} \right] \mathbf{L} = 2 \dot{\rho} \dot{\mathbf{L}} + \rho \ddot{\mathbf{L}} = \ddot{\mathbf{R}} + \frac{k^2 \mathbf{R}}{r^3} \quad (24.6)$$

y multiplicando vectorialmente por  $\mathbf{L}$ , se obtiene finalmente

$$2 \dot{\rho} \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{L}} + \rho \mathbf{L} \wedge \ddot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \wedge \ddot{\mathbf{R}} + \frac{k^2 \mathbf{R}}{r^3} \quad (24.7)$$

Según que multipliquemos escalarmente esta igualdad por  $\dot{\mathbf{L}}$  o  $\ddot{\mathbf{L}}$ , obtendremos las ecuaciones respectivas

$$\rho (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{L}}) = (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{R}}) + \frac{k^2}{r^3} (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \mathbf{R}) \quad (24.8)$$

$$2 \dot{\rho} (\mathbf{L} \ddot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{L}}) = (\mathbf{L} \ddot{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{L}}) + \frac{k^2}{r^3} (\mathbf{L} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{L}}) \quad (24.9)$$

en las que  $(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C})$  representa un producto mixto. Por tanto, si hacemos

$$\begin{aligned} A_1 &= (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{R}}) & B_1 &= k^2 (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \mathbf{R}) \\ A_2 &= (\mathbf{L} \ddot{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{L}}) & B_2 &= k^2 (\mathbf{L} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{L}}) \\ D &= (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{L}}) \end{aligned} \quad (24.10)$$

las ecuaciones (24.8), (24.9), se reducen a la forma

$$\rho = \frac{1}{D} \left( A_1 + \frac{B_1}{r^3} \right) \quad (24.11)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2D} \left( A_2 + \frac{B_2}{r^3} \right) \quad (24.12)$$



o bien

$$\rho = A + \frac{B}{r^3} \quad (24.13)$$

$$2 \dot{\rho} = A^* + \frac{B^*}{r^3} \quad (24.14)$$

si ponemos

$$A = A_1/D, \quad B = B_1/D, \quad A^* = A_2/D, \quad B^* = B_2/D \quad (24.15)$$

Para no entorpecer el orden de la exposición, supondremos ahora que se cumple la condición  $D \neq 0$ , y admitiremos que, con ayuda de datos de observación, se pueden calcular los vectores  $\mathbf{L}$ ,  $\dot{\mathbf{L}}$ ,  $\ddot{\mathbf{L}}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\dot{\mathbf{R}}$ ,  $\ddot{\mathbf{R}}$ , y por consiguiente los determinantes  $A_1, B_1, A_2, B_2, D$ .

Entonces, volviendo a la figura 24.1, podemos escribir las siguientes fórmulas relativas al triángulo  $OP_0P$ ,

$$\rho = R \frac{\text{sen}(\psi + \phi)}{\text{sen } \phi} \quad (24.16)$$

$$r = R \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \phi} \quad (24.17)$$

donde  $\psi$  es un ángulo calculable por la expresión

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho}}{R \rho} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{L}}{R} \quad (24.18)$$

Combinando entre si las igualdades (24.13), (24.16) y (24.17), tendremos

$$R \text{sen}(\psi + \phi) = A \text{sen } \phi + \frac{B \text{sen } \phi}{r^3} = A \text{sen } \phi + \frac{B \text{sen}^4 \phi}{R^3 \text{sen}^3 \psi} \quad (24.19)$$

o bien

$$R \text{sen } \psi \cos \phi + (R \cos \phi - A) \text{sen } \phi = \frac{B \text{sen}^4 \phi}{R^3 \text{sen}^3 \psi} \quad (24.20)$$

y haciendo

$$M = \frac{N R^3 \text{sen}^3 \psi}{B} \quad (24.21)$$

$$N \text{sen } \varepsilon = R \text{sen } \phi \quad (24.22)$$

$$N \cos \varepsilon = R \cos \phi - A \quad (24.23)$$

nos queda finalmente la ecuación fundamental

$$M \text{sen}(\phi + \varepsilon) = \text{sen}^4 \phi \quad (24.24)$$

que será estudiada con más detalle en otro párrafo.

Si esta ecuación ha sido resuelta con respecto a  $\phi$ , la expresión (24.17) nos dará el valor de  $r$ , y las fórmulas (24.13), (24.14), los de  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$ , con lo cual las igualdades (24.2) y (24.3) nos permitirán disponer del par  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , que según vimos en el apartado 20, son suficientes para determinar los elementos de la órbita.

## 25. CÁLCULO DE LOS DETERMINANTES

Como ya quedó indicado, para poder calcular los determinantes  $D, A_1, B_1, A_2, B_2$ , cuya definición figura en (24.10), es necesario conocer los vectores  $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ , y sus derivados hasta el segundo orden.

Pero sabemos que la posición de  $P_o$  con respecto a  $O$  está perfectamente definida en todo instante, ya se trate de la posición del Sol (caso de órbitas planetarias) o del centro de la Tierra (caso de órbitas de satélites artificiales) con respecto a un observatorio situado sobre la superficie terrestre.

En el primer caso, despreciando el efecto de paralaje diurna, bastará estudiar la tabla de coordenadas del Sol  $(X, Y, Z)$  en cualquier Almanaque, para deducir con la precisión requerida, las componentes  $(X, Y, Z)$  de  $\mathbf{R}$  y  $(\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z})$  de  $\ddot{\mathbf{R}}$ .

En el segundo caso, las componentes de  $\mathbf{R}$ , serán

$$\begin{aligned} X &= -(C + h) \cos \varphi \cos(\theta - \lambda) \\ Y &= -(C + h) \cos \varphi \sin(\theta - \lambda) \\ Z &= -(S + h) \sin \varphi \end{aligned} \quad (25.1)$$

donde la altitud  $h$  viene expresada en unidades de radio ecuatorial terrestre y  $\varphi, \lambda$ , represente la latitud y longitud del lugar de observación. Las cantidades  $C, S$ , están definidas, con ayuda del achatamiento terrestre  $\alpha = 1/298,25$ , en la forma

$$C = 1/\sqrt{1 - \alpha(2 - \alpha) \sin^2 \varphi} \quad S = C(1 - \alpha)^2 \quad (25.2)$$

y  $\theta = \theta_o + \mu t$ , es el tiempo sidereo medio, que se expresa por medio del tiempo sidereo medio  $\theta_o$  de un cierto instante  $t_o = 0$ , que se toma como origen de tiempos y de una constante  $\mu = 1,002737909$  dada en días medios.

De esta forma, el problema de calcular los determinantes mencionados se centra en la obtención de los vectores  $\mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}, \ddot{\mathbf{L}}$  para una cierta época  $t$ , dados los vectores  $\mathbf{L}^{(1)}, \dot{\mathbf{L}}^{(2)}, \ddot{\mathbf{L}}^{(3)}$ , correspondientes a tres épocas  $t_1, t_2, t_3$ .

Dejando a un lado las críticas que se han hecho al método de Laplace, podemos suponer que  $\mathbf{L}$  es calculable en cualquier instante perteneciente al intervalo  $(t_1, t_3)$ , por la fórmula de interpolación de Lagrange. Esto es

$$\mathbf{L} = Q_1 \mathbf{L}^{(1)} + Q_2 \mathbf{L}^{(2)} + Q_3 \mathbf{L}^{(3)} \quad (25.3)$$

donde

$$Q_i = \frac{(t - t_j)(t - t_k)}{(t_i - t_j)(t_i - t_k)} \quad (25.4)$$

designa uno cualquiera de los términos  $Q_1, Q_2, Q_3$ , por identificación de los índices  $(ijk)$  con cualquiera de las permutaciones  $(123), (231), (312)$ .

Derivando dos veces, con respecto al tiempo, las igualdades anteriores, se obtiene

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{Q}_1 \mathbf{L}^{(1)} + \dot{Q}_2 \mathbf{L}^{(2)} + \dot{Q}_3 \mathbf{L}^{(3)} \quad (25.5) \quad \ddot{\mathbf{L}} = \ddot{Q}_1 \mathbf{L}^{(1)} + \ddot{Q}_2 \mathbf{L}^{(2)} + \ddot{Q}_3 \mathbf{L}^{(3)} \quad (25.6)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{(t-t_j) + (t-t_k)}{(t_i-t_j)(t_i-t_k)} \quad (25.7) \quad \ddot{Q}_i = \frac{2}{(t_i-t_j)(t_i-t_k)} \quad (25.8)$$

Ahora bien, para calcular los determinantes (24.10), consideremos, de modo simbólico, los vectores  $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}$ , de componentes respectivos  $(Q_1, Q_2, Q_3), (\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3), (\ddot{Q}_1, \ddot{Q}_2, \ddot{Q}_3)$ , y pongamos

$$q = (t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) \quad (25.9)$$

Calculando los productos vectoriales  $\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}}$ , es fácil comprobar que sus componentes verifican las igualdades

$$(\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}})_i = (t-t_i)^2/q \quad (25.10) \quad (\mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}})_i = 2(t-t_i)/q \quad (25.11)$$

y por tanto, para el producto mixto de los vectores  $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}$ , se tiene

$$(\mathbf{Q} \dot{\mathbf{Q}} \ddot{\mathbf{Q}}) = 2/q \quad (25.12)$$

Finalmente, como consecuencia de todo lo anterior, se deduce

$$\mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{L}} = (\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}})_1 (\mathbf{L}^{(2)} \wedge \mathbf{L}^{(3)}) + (\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}})_2 (\mathbf{L}^{(3)} \wedge \mathbf{L}^{(1)}) + (\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}})_3 (\mathbf{L}^{(1)} \wedge \mathbf{L}^{(2)}) \quad (25.13)$$

$$\mathbf{L} \wedge \ddot{\mathbf{L}} = (\mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}})_1 (\mathbf{L}^{(2)} \wedge \mathbf{L}^{(3)}) + (\mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}})_2 (\mathbf{L}^{(3)} \wedge \mathbf{L}^{(1)}) + (\mathbf{Q} \wedge \ddot{\mathbf{Q}})_3 (\mathbf{L}^{(1)} \wedge \mathbf{L}^{(2)}) \quad (25.14)$$

y los determinantes (24.10) adquieren la forma

$$D = (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{L}}) = (\mathbf{Q} \mathbf{Q} \mathbf{Q}) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) = \frac{2}{q} (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) \quad (25.15)$$

$$A_1 = (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \ddot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{q} \left[ (t-t_1)^2 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \ddot{\mathbf{R}}) + (t-t_2)^2 (\mathbf{L}^{(3)} \mathbf{L}^{(1)} \ddot{\mathbf{R}}) + (t-t_3)^2 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \ddot{\mathbf{R}}) \right]$$

$$A_2 = (\mathbf{L} \ddot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{L}}) = \frac{2}{q} \left[ (t-t_1) (\mathbf{L}^{(2)} \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{(3)}) + (t-t_2) (\mathbf{L}^{(3)} \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{(1)}) + (t-t_3) (\mathbf{L}^{(1)} \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{(2)}) \right]$$

$$B_1 = k^2 (\mathbf{L} \dot{\mathbf{L}} \mathbf{R}) = \frac{k^2}{q} \left[ (t-t_1)^2 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{R}) + (t-t_2)^2 (\mathbf{L}^{(3)} \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}) + (t-t_3)^2 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}) \right]$$

$$B_2 = (\mathbf{L} \mathbf{R} \dot{\mathbf{L}}) = \frac{2k^2}{q} \left[ (t-t_1) (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R} \mathbf{L}^{(3)}) + (t-t_2) (\mathbf{L}^{(3)} \mathbf{R} \mathbf{L}^{(1)}) + (t-t_3) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R} \mathbf{L}^{(2)}) \right] \quad (25.16)$$

Generalmente se hace coincidir la época  $t$  con  $t_2$ , por lo cual los coeficientes anteriores se

simplifican, quedando

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{q} \left[ (t_2 - t_1)^2 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \ddot{\mathbf{R}}) + (t_2 - t_3)^2 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \ddot{\mathbf{R}}) \right] \\
A_2 &= \frac{2}{q} \left[ (t_2 - t_1) (\mathbf{L}^{(2)} \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{(3)}) + (t_2 - t_3) (\mathbf{L}^{(1)} \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{(2)}) \right] \\
B_1 &= \frac{k^2}{q} \left[ (t_2 - t_1)^2 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{R}) + (t_2 - t_3)^2 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}) \right] \\
B_2 &= \frac{2k^2}{q} \left[ (t_2 - t_1) (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R} \mathbf{L}^{(3)}) + (t_2 - t_3) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R} \mathbf{L}^{(2)}) \right]
\end{aligned} \tag{25.17}$$

y sobreentendiéndose que los vectores  $\mathbf{R}, \ddot{\mathbf{R}}$ , han de ser tomados en la época  $t_2$ . De acuerdo con la fórmula (25.15), vemos la condición  $D \neq 0$  es equivalente a escribir

$$(\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) \neq 0$$

toda vez que  $q$  es un número finito y distinto de cero. Por consiguiente, el método de Laplace no es aplicable si los vectores  $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}, \mathbf{L}^{(3)}$ , son coplanarios.

## 26. MÉTODO DE GAUSS

Al igual que en el anterior, el método de Gauss se basa en observaciones correspondientes a tres épocas  $t_1, t_2, t_3$ , de tal manera que siguiendo análogas notaciones, pueden suponerse conocidos los vectores  $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}, \mathbf{L}^{(3)}, \mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{R}^{(3)}$ .

Entonces, si consideramos el punto  $P_o$  de la figura 24.1, como fijo, los vectores  $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(3)}$ , serán coplanarios y existirá una relación del tipo

$$\mathbf{r}^{(2)} = n_1 \mathbf{r}^{(1)} + n_3 \mathbf{r}^{(3)} \tag{26.1}$$

de donde resulta

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}^{(2)} \wedge \mathbf{r}^{(3)}|}{|\mathbf{r}^{(1)} \wedge \mathbf{r}^{(3)}|} \tag{26.2} \quad n_3 = \frac{|\mathbf{r}^{(1)} \wedge \mathbf{r}^{(2)}|}{|\mathbf{r}^{(1)} \wedge \mathbf{r}^{(3)}|} \tag{26.3}$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta la expresión (24.2), la fórmula (26.1) también se puede escribir

$$\rho_2 \mathbf{L}^{(2)} - \mathbf{R}^{(2)} = n_1 (\rho_1 \mathbf{L}^{(1)} - \mathbf{R}^{(1)}) + n_3 (\rho_3 \mathbf{L}^{(3)} - \mathbf{R}^{(3)}) \tag{26.4}$$

Multiplicando esta ecuación por los productos  $\mathbf{L}^{(3)} \wedge \mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)} \wedge \mathbf{L}^{(3)}, \mathbf{L}^{(1)} \wedge \mathbf{L}^{(2)}$  se obtienen las respectivas fórmulas

$$\rho_2 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) = (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) - n_1 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{L}^{(3)}) - n_3 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(3)} \mathbf{L}^{(3)}) \tag{26.5}$$

$$\rho_1 n_1 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) = -(\mathbf{R}^{(2)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) - n_1 (\mathbf{R}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) - n_3 (\mathbf{R}^{(3)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) \tag{26.6}$$

$$\rho_3 n_3 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) = -(\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}^{(2)}) - n_1 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}^{(1)}) - n_3 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}^{(3)}) \tag{26.7}$$

en las que los productos mixtos que intervienen, son perfectamente calculables a partir de los datos de observación.

Estas ecuaciones servirán, sin duda, para el cómputo de las distancias  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ , tan pronto como demos un procedimiento de obtención de las cantidades  $n_1$ ,  $n_3$ .

Para ello, consideremos la época  $t_2$  como origen de tiempos y pongamos

$$\tau_1 = t_2 - t_1 \quad \tau_3 = t_3 - t_2 \quad \tau_2 = t_3 - t_1 = \tau_1 + \tau_3$$

La igualdad (14.3), entonces se puede escribir en las formas

$$\mathbf{r}^{(1)} = F_1 \mathbf{r}^{(2)} + G_1 \dot{\mathbf{r}}^{(2)} \quad \mathbf{r}^{(3)} = F_3 \mathbf{r}^{(2)} + G_3 \dot{\mathbf{r}}^{(2)} \quad (26.8)$$

donde las funciones  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $F_3$ ,  $G_3$ , satisfacen las relaciones (15.3), (15.4), o sea

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{u_2}{2} \tau_1^2 + \dots & F_3 &= 1 - \frac{u_2}{2} \tau_3^2 + \dots \\ G_1 &= -\tau_1 + \frac{u_2}{6} \tau_1^3 - \dots & G_3 &= \tau_3 - \frac{u_2}{6} \tau_3^3 - \dots \end{aligned}$$

de donde

$$F_1 G_3 - F_3 G_1 = \tau_1 + \tau_3 - \frac{u_2}{6} [\tau_1^3 + 3 \tau_1^2 \tau_3 + 3 \tau_1 \tau_3^2 + \tau_3^3] = \tau_2 - \frac{u_2}{6} \tau_2^3 + \dots$$

De aquí resultan sencillas expresiones para las cantidades  $n_1$ ,  $n_3$ , sin más que recordar las fórmulas (26.2), (26.3) y aplicar (26.8), previa eliminación del factor común  $\mathbf{r}^{(2)} \wedge \dot{\mathbf{r}}^{(2)}$ . Así se obtiene

$$n_1 = \frac{G_3}{F_1 G_3 - F_3 G_1} = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{u_2 \tau_1 \tau_3}{6} \left[ 1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \right] = n_1^o + q^o (1 + n_1^o) / r_2^3 \quad (26.9)$$

$$n_3 = \frac{-G_1}{F_1 G_3 - F_3 G_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{u_2 \tau_1 \tau_3}{6} \left[ 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \right] = n_3^o + q^o (1 + n_3^o) / r_2^3 \quad (26.10)$$

después de poner

$$n_1^o = \frac{\tau_3}{\tau_2} \quad n_3^o = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad q^o = \frac{k^2 \tau_1 \tau_3}{6} \quad (26.11)$$

Finalmente, llevando estas expresiones a la fórmula (26.5), resulta una ecuación análoga a la (24.13), empleada en el método de Laplace. Esto es

$$\rho_2 = \bar{A} + \frac{\bar{B}}{r_2^3} \quad (26.12)$$

donde los coeficientes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  son calculables por las relaciones

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{(\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)})} \left[ (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)}) - n_1^o \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{L}^{(3)} - n_3^o \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(3)} \mathbf{L}^{(3)} \right] \\ \bar{B} &= - \frac{q^o}{(\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)})} \left[ (1 + n_1^o) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{L}^{(3)}) + (1 + n_3^o) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{R}^{(3)} \mathbf{L}^{(3)}) \right] \end{aligned} \quad (26.13)$$

Es, pues, indudable que podemos repetir los razonamientos contenidos en el formulario que va desde la ecuación (24.16) a la (24.24). Así obtendremos  $r_2$ ,  $\rho_2$  y por medio de (26.12), (26.13), los coeficientes  $n_1$ ,  $n_3$ . Con esto el cálculo de  $\rho_1$ ,  $\rho_3$ , es inmediato por las fórmulas (26.6), (26.7), y los de  $\mathbf{r}^{(1)}$ ,  $\mathbf{r}^{(3)}$ , a través de (24.2).

Una vez conocidos dos vectores de posición  $\mathbf{r}^{(1)}$ ,  $\mathbf{r}^{(3)}$ , la obtención de los elementos orbitales se hará en la forma expuesta en el párrafo 21.

Notemos que, también ahora, el método cae en defecto cuando los vectores  $\mathbf{L}^{(1)}$ ,  $\mathbf{L}^{(2)}$ ,  $\mathbf{L}^{(3)}$ , son coplanarios.

Para completar este esquema clásico de determinación de órbitas, en los párrafos siguientes haremos un estudio de la ecuación fundamental (24.24) y de algunas variantes de cálculo más recientes.

## 27. ESTUDIO DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL

En los métodos de Laplace y Gauss, que acabamos de ver, la resolución del problema de determinación de órbitas se hace depender de la resolución de la ecuación

$$M \operatorname{sen}(\phi + \varepsilon) = \operatorname{sen}^4 \phi \quad (27.1)$$

que hemos denominado fundamental. Sin embargo, el problema inicial consiste en la resolución de un triángulo (ver fig 24.1), en el que son dados un lado  $R$ , un ángulo  $\Phi$ , y , por intermedio de cantidades conocidas  $A$  y  $B$ , una relación

$$\rho = A + \frac{B}{r^3} \quad (27.2)$$

entre los otros dos lados.

Su resolución puede intentarse de diversas formas: Por ejemplo, en el párrafo 24 se ha llegado a la ecuación (27.1), que nos dará en primer lugar el ángulo.

Otra manera de proceder, calculando previamente el lado  $r$ , puede consistir en sustituir la expresión (27.2) de  $\rho$ , en la igualdad

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2 R \rho \cos \Psi \quad (27.3)$$

En este caso, se llega a la ecuación

$$r^2 = (A^2 + R^2 - 2 A R \cos \Psi) - \frac{2 B (R \cos \Psi - A)}{r^3} + \frac{B^2}{r^6}$$

o bien, empleando las transformaciones (24.22) y (24.23), y multiplicando por  $r^6$ , a la siguiente

$$r^8 = N^2 r^6 - 2 (B N \cos \varepsilon) r^3 + B^2 \quad (27.4)$$

Tanto en el caso de la ecuación (27.1), como en el de la (27.4) la solución, o al menos una solución aproximada, puede obtenerse gráficamente. En efecto, en el primero podrán representarse las curvas

$$y = \text{sen}^4 \phi \qquad y = M \text{sen}(\phi + \varepsilon)$$

en un sistema cartesiano  $(\phi, y)$  y deducir la solución (o soluciones) como intersección de ambas curvas.

En el segundo, haciendo  $w = r^3$ , el problema se resuelve de manera análoga representando las curvas

$$y = w^{8/3} \qquad y = N^2 w^2 - 2 (B N \cos \varepsilon) w + B^2$$

en un sistema  $(w, y)$ , y buscando su intersección (o intersecciones).

La solución obtenida se puede aproximar por métodos usuales y en el caso de que existan varias posibles soluciones, su discriminación se hará con ayuda de alguna nueva observación.

## 28. MÉTODO DE OLBERS

Este método fue ideado para el cálculo de órbitas parabólicas en el sistema solar y es utilizado como una buena aproximación en el caso de órbitas de cometas.

Para hacernos una idea de su fundamento, consideremos de nuevo la ecuación (26.4), escrita en la forma

$$n_1 \rho_1 \mathbf{L}^{(1)} - \rho_2 \mathbf{L}^{(2)} + n_3 \rho_3 \mathbf{L}^{(3)} = n_1 \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)} + n_3 \mathbf{R}^{(3)} = \mathbf{V} \quad (28.1)$$

Entonces, multiplicando escalarmente la ecuación anterior por el producto vector  $\mathbf{L}^{(2)} \wedge \mathbf{V}$ , tendremos

$$\rho_3 = \frac{n_1 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{V})}{n_3 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{V})} \rho_1 = M \rho_1 \quad (28.2)$$

que es la ecuación fundamental de Olbers.

El problema consiste, por tanto, en poder calcular el coeficiente  $M$ , dado por la expresión

$$M = \frac{n_1 (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{V})}{n_3 (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{V})} \quad (28.3)$$

para lo cual es necesario obtener previamente las cantidades  $n_1, n_3$ ; puesto que los vectores  $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}, \mathbf{L}^{(3)}, \mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{R}^{(3)}$ , se suponen dados.

Recordemos, sin embargo, que según (26.2), (26.3), las cantidades  $n_1, n_3$ , son proporcionales a las áreas  $\Delta_{23}, \Delta_{12}$  de los triángulos determinados por los pares de vectores  $(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(3)}), (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)})$ . Por consiguiente, si las observaciones son suficientemente próximas, las áreas de dichos triángulos pueden ser sustituidas por las de los sectores correspondientes y tendremos

$$\begin{aligned} n_1 &= h \Delta_{23} \simeq h' S_{23} = h'' (t_3 - t_2) \\ n_3 &= h \Delta_{12} \simeq h' S_{12} = h'' (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (28.4)$$

donde  $h, h', h''$ , son constantes que no necesitamos especificar.

De aquí se deduce la relación

$$\frac{n_1}{n_3} \simeq \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \quad (28.5)$$

De modo semejante, si consideramos el movimiento de la Tierra con respecto al Sol, existirán, para los vectores  $\mathbf{R}^{(i)}$ , análogas relaciones a las (26.1), (26.2) y (26.3), es decir

$$\mathbf{R}^{(2)} = N_1 \mathbf{R}^{(1)} + N_3 \mathbf{R}^{(3)} \quad (28.6)$$

$$N_1 = \frac{|\mathbf{R}^{(2)} \wedge \mathbf{R}^{(3)}|}{|\mathbf{R}^{(1)} \wedge \mathbf{R}^{(3)}|} \quad N_3 = \frac{|\mathbf{R}^{(1)} \wedge \mathbf{R}^{(2)}|}{|\mathbf{R}^{(1)} \wedge \mathbf{R}^{(3)}|} \quad (28.7)$$

$$\frac{N_1}{N_3} \simeq \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \quad (28.8)$$

de donde, siendo  $m$  una constante, resulta

$$n_1 \simeq m N_1 \quad n_3 \simeq m N_3 \quad (28.9)$$

y también

$$\mathbf{V} = n_1 \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)} + n_3 \mathbf{R}^{(3)} \simeq m (N_1 \mathbf{R}^{(1)} + N_3 \mathbf{R}^{(3)}) - \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{R}^{(2)} (m - 1) \quad (28.10)$$

Dentro de este orden de aproximaciones, el coeficiente  $M$  se podrá escribir en la forma

$$M = \frac{(t_3 - t_2) (\mathbf{L}^{(1)} \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{R}^{(2)})}{(t_2 - t_1) (\mathbf{L}^{(2)} \mathbf{L}^{(3)} \mathbf{R}^{(2)})} \quad (28.11)$$

Naturalmente, en el caso de órbitas parabólicas de satélites artificiales, los cálculos no podrían ser conducidos del mismo modo.

Considerando ahora el triángulo de lados  $r^{(1)} = P_o P^{(1)}$ ,  $r_3 = P_o P^{(3)}$ ,  $s = P^{(1)} P^{(3)}$ , y haciendo uso de la fórmula (28.2), tenemos

$$r^{(1)2} = (\rho_1 \mathbf{L}^{(1)} - \mathbf{R}^{(1)})^2 = a_1 + b_1 \rho_1 + c_1 \rho_1^2 \quad (28.12)$$

$$r^{(3)2} = (\rho_1 \mathbf{L}^{(3)} - \mathbf{R}^{(3)})^2 = a_3 + b_3 \rho_1 + c_3 \rho_1^2 \quad (28.13)$$

$$s^2 = \left[ \rho_1 (M \mathbf{L}^{(3)} - \mathbf{L}^{(1)}) - (\mathbf{R}^{(3)} - \mathbf{R}^{(1)}) \right]^2 = a_2 + b_2 \rho_1 + c_2 \rho_1^2 \quad (28.14)$$

donde las constantes  $a_i, b_i, c_i$ , tienen las siguientes expresiones

$$\begin{array}{lll} a_1 = (\mathbf{R}^{(1)})^2 & b_1 = -2 (\mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{R}^{(1)}) & c_1 = (\mathbf{L}^{(1)})^2 = 1 \\ a_2 = (\mathbf{R}^{(3)} - \mathbf{R}^{(1)})^2 & b_2 = -2 (M \mathbf{L}^{(3)} - \mathbf{L}^{(1)}) \cdot (\mathbf{R}^{(3)} - \mathbf{R}^{(1)}) & c_2 = (M \mathbf{L}^{(3)} - \mathbf{L}^{(1)})^2 \\ a_3 = (\mathbf{R}^{(3)})^2 & b_3 = -2 M (\mathbf{L}^{(3)} \cdot \mathbf{R}^{(3)}) & c_3 = M (\mathbf{L}^{(3)})^2 = M^2 \end{array}$$



Por otra parte, la ecuación (16.18), que ya fue obtenida por Euler para el caso parabólico, puede ser aplicada al triángulo considerado

$$\left(1 + \frac{s}{r^{(1)} + r^{(3)}}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{s}{r^{(1)} + r^{(3)}}\right)^{3/2} = \frac{6k(t_3 - t_1)}{(r^{(1)} + r^{(3)})^{3/2}} = 3\eta \quad (28.15)$$

e invertida en la forma

$$s = (r^{(1)} + r^{(3)}) f(\eta) = (r^{(1)} + r^{(3)}) \left[ \eta + \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{5}{384} \eta^5 + \dots \right] \quad (28.16)$$

aunque no nos detengamos a demostrar tal desarrollo en serie.

Por tanto, dado un cierto valor aproximado de  $\rho_1$ , podemos calcular  $r^{(1)}$ ,  $r^{(3)}$ , por las fórmulas (28.12), (28.13) y  $\eta$  por (28.15). Entonces, las fórmulas (28.14) y (28.16), nos darán sendos valores  $s$ ,  $s'$  que deberían coincidir. En caso contrario, será necesario variar el valor de  $\rho_1$  hasta lograr tal coincidencia. El dibujo de las curvas  $(\rho_1, s)$ ,  $(\rho_1, s')$  facilitará el cálculo.

Una vez obtenido el valor correcto de  $\rho_1$ , la continuación de los cálculos hasta la obtención de los elementos orbitales, es análoga a la que hemos visto en los métodos anteriores.

## 29. OTROS MÉTODOS DE CÁLCULO

Frente a los métodos clásicos de Laplace y Gauss, que utilizan solamente datos angulares, se han desarrollado métodos más recientes basados en medidas de distancias (radar, láser), o en medidas de velocidades radiales (medidas Doppler), si bien en ciertos casos el número de datos de observación excede de seis. Veamos algunos de estos métodos:

A).- Por medidas simultáneas de distancias desde tres observatorios: Denotemos con los sub-índices  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) cada uno de los observatorios  $O_j$ , que suponemos no están situados sobre el mismo plano con el punto  $P_o$ , y con los super-índices  $k$  ( $k = 1, 2$ ) cada una de las observaciones. Tenemos así los siguientes datos de observación:

$$\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \rho_3^{(1)}, \rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, \rho_3^{(2)}$$

De acuerdo con la figura 29.1, tendremos

$$\rho_j = \mathbf{R}_j + \mathbf{r} \quad (29.1)$$

siendo perfectamente conocidos los vectores  $\mathbf{R}_j$  y las distancias  $\rho = |\rho_j|$ , para dos épocas distintas. El problema, pues, consiste en determinar el vector  $\mathbf{r}$ , ya que con dos determinaciones de este tipo podrá aplicarse el método desarrollado en el párrafo 21.

Siendo  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , las distancias medidas desde los tres observatorios;  $r_1, r_2, r_3$ , las componentes cartesianas de  $\mathbf{r}$  y  $R_{j1}, R_{j2}, R_{j3}$ , las componentes cartesianas de  $\mathbf{R}_j$ , tendremos

$$\rho_j^2 = r^2 + R_j^2 - 2(R_{j1} r_1 + R_{j2} r_2 + R_{j3} r_3) \quad (29.2)$$

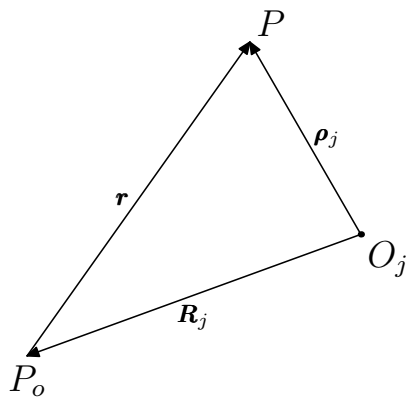


fig. 29.1

Restando estas ecuaciones para los pares de índices (1,2) y (1,3), resulta

$$A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 = A \quad (29.3)$$

$$B_1 r_1 + B_2 r_2 + B_3 r_3 = B \quad (29.4)$$

siendo

$$\begin{aligned} A_1 &= R_{21} - R_{11} & A_2 &= R_{22} - R_{12} & A_3 &= R_{23} - R_{13} \\ B_1 &= R_{31} - R_{11} & B_2 &= R_{32} - R_{12} & B_3 &= R_{33} - R_{13} \\ A &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_2^2 - R_1^2 + R_2^2) & A &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_3^2 - R_1^2 + R_3^2) \end{aligned} \quad (29.5)$$

Despejando en (29.3), (29.4), las distancias  $r_1, r_2$ , en función de  $r_3$ , se deducen las ecuaciones

$$r_1 = M_1 r_3 + N_1 \quad (29.6) \quad r_2 = M_2 r_3 + N_2 \quad (29.7)$$

donde los coeficientes  $M_1, M_2, N_1, N_2$ , satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} & N_1 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_3 & A_2 \\ B_2 & B_2 \end{vmatrix} \\ D &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} & & \\ M_2 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} & N_2 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (29.8)$$

Las dos igualdades (29.6) y (29.7), unidas a la condición

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \quad (29.9)$$

permiten expresar las cantidades  $r, r_1, r_2$ , en función de  $r_3$ ; por consiguiente, si sustituimos sus expresiones en la ecuación (29.2), para  $j = 1$ , obtendremos una ecuación de segundo grado en  $r_3$ , con dos soluciones en general. Mediante las relaciones (29.5) y (29.7) se deducen los valores correspondientes de  $r_1, r_2$ . En resumen, tendremos las tres componentes del vector  $\mathbf{r}$ , como habíamos anunciado.

La discriminación entre las dos soluciones obtenidas para cada observación no ofrece dificultades, por conocerse casi siempre un valor aproximado.

B).- Modificación el método de Laplace: En este método se consideran como elementos de observación, en número superabundante, tres observaciones completas del tipo  $(\dot{\rho}, \alpha, \delta, t)$ .

Si volvemos a considerar lo dicho en el párrafo 24 y tenemos en cuenta que el vector  $\mathbf{L}$  verifica las condiciones

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = 1 \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{L}} = 0 \quad \mathbf{L} \cdot \ddot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{L}} \cdot \dot{\mathbf{L}} \quad (29.10)$$

bastará multiplicar escalarmente por  $\mathbf{L}$  la ecuación (24.6), para obtener

$$\left(\dot{\mathbf{L}}^2 - \frac{k}{r}\right) \rho + \frac{k^2}{r^3} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) = \ddot{\rho} - (\mathbf{L} \cdot \ddot{\mathbf{R}}) \quad (29.11)$$

o bien haciendo

$$M = \ddot{\rho} - \mathbf{L} \cdot \ddot{\mathbf{R}} \quad N = -k^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{R} \quad P = \dot{\mathbf{L}}^2 \quad Q = -k^2 \quad (29.12)$$

resultará

$$\rho = \frac{M + N/r^3}{P + Q/r^3} \quad (29.13)$$

Aplicando el método a la segunda observación, esto es para  $t = t_2$ , las expresiones (25.3) y (25.5) nos darán los vectores  $\mathbf{L}^{(2)}$ ,  $\dot{\mathbf{L}}^{(2)}$ ; por tanto, los coeficientes  $M, N, P, Q$ , son perfectamente calculables si se especifica la forma de obtener el valor  $\ddot{\rho}^{(2)}$

Para ello, desarrollaremos en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(1)} &= \dot{\rho}^{(2)} + (t_1 - t_2) \ddot{\rho}^{(2)} + \frac{1}{2} (t_1 - t_2)^2 \ddot{\rho}^{(2)} + \dots \\ \dot{\rho}^{(3)} &= \dot{\rho}^{(2)} + (t_3 - t_2) \ddot{\rho}^{(2)} + \frac{1}{2} (t_3 - t_2)^2 \ddot{\rho}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (29.14)$$

y multiplicando respectivamente estas igualdades por  $(t_3 - t_2)^2$ ,  $(t_1 - t_2)^2$  y restando, tendremos

$$\ddot{\rho}^{(2)} = D_1 \dot{\rho}^{(1)} + D_2 \dot{\rho}^{(2)} + D_3 \dot{\rho}^{(3)} \quad (29.15)$$

con

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{q} (t_3 - t_2)^2 & D_3 &= \frac{(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)}{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} \\ D_2 &= \frac{1}{q} (t_1 - t_2)^2 & q &= (t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (29.16)$$

Finalmente, la combinación de la ecuación (29.13) con la fórmula

$$F(r) = \rho^2 - 2 \rho R \cos \psi + R^2 - r^2 = 0 \quad (29.17)$$

nos permite calcular  $r$  por iteración.

En efecto,

$$F'(r) = 2(\rho - R \cos \psi) \frac{d\rho}{dr} - 2r \quad (29.18)$$

y análogamente (29.13)

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{3r^2(MQ - PN)}{(Pr^3 + Q)^2} \quad (29.19)$$

de donde

$$F'(r) = \frac{6 r^2 (\rho - R \cos \psi) (M Q - P N)}{(P r^3 + Q)^2} - 2 r \quad (29.20)$$

y la fórmula iterativa de aproximación de Newton

$$r_{n+1} = r_n - F(r_n)/F'(r_n) \quad (29.21)$$

puede ser aplicada reiteradamente a partir de un valor aproximado  $r_o$ , calculando  $\rho_o$  por (29.13),  $F(r_o)$  por (29.17) y  $F'(r_o)$  por (29.20).

### 30. ÓRBITAS MEJORADAS

Podemos reducir los cálculos de mejora de órbitas a dos cuestiones fundamentales:

- a) Reducción de observaciones.
- b) Aumento de la precisión en el cálculo.

El primer problema fue tratado con amplitud suficiente en nuestro curso de Astronomía bajo el subtítulo de reducción de posiciones de estrellas o planetas.

El segundo problema será estudiado aquí, aunque solo sea parcialmente, desarrollando dos de los métodos más empleados.

A).- Mejora de los vectores de posición y velocidad: Supongamos conocida una primera aproximación de los vectores de posición y velocidad,  $\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2$ , para la época  $t = t_2$ , tal como hemos visto, por ejemplo, en el método de Laplace. Entoces

$$\mathbf{r}_1 = F_1 \mathbf{r}_2 + G_1 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad \mathbf{r}_3 = F_3 \mathbf{r}_2 + G_3 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (30.1)$$

Si despejamos los vectores  $\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2$ , en este sistema, se obtiene sin dificultad

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{D} (G_3 \mathbf{r}_1 - G_1 \mathbf{r}_3) \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{D} (-F_3 \mathbf{r}_1 + F_1 \mathbf{r}_3) \quad (30.2)$$

siendo

$$D = F_1 G_3 - F_3 G_1 \quad (30.3)$$

Utilizando los valores aproximados de  $\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2$ , en las series dadas al final del párrafo 15, obtendremos los coeficientes  $G_1 D^{-1}, G_3 D^{-1}, F_1 D^{-1}, F_3 D^{-1}$ , o sea unos valores mejorados de  $\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2$ , que nos servirán de nuevo para el cálculo de los citados coeficientes. El proceso es iterativo y fácilmente adaptable al cálculo con máquinas.

B).- La transformación de Gibbs: Esta transformación tiene por objeto mejorar los elementos orbitales, calculando el vector velocidad  $\dot{\mathbf{r}}_2$  a partir de los tres vectores de posición  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ,

correspondientes a las épocas  $t_1, t_2, t_3$ , con una precisión que alcanza el quinto orden. Para ello, pongamos

$$\tau_{12} = k(t_2 - t_1) \quad \tau_{13} = k(t_3 - t_1) \quad \tau_{23} = k(t_3 - t_2)$$

y consideremos los desarrollos en serie

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - c_{12} \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{2} \tau_{12}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{6} \tau_{12}^3 \dddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{24} \tau_{12}^4 \overset{iv}{\mathbf{r}}_2 - \dots \quad (30.4)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + c_{23} \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{2} \tau_{23}^2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{6} \tau_{23}^3 \dddot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{24} \tau_{23}^4 \overset{iv}{\mathbf{r}}_2 + \dots \quad (30.5)$$

Multiplicando (30.4) por  $\tau_{23}$ , (30.5) por  $\tau_{12}$  y sumando, resulta

$$\tau_{23} \mathbf{r}_1 - \tau_{13} \mathbf{r}_2 + \tau_{12} \mathbf{r}_3 = \tau_{12} \tau_{23} \tau_{13} \left[ \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{6} (\tau_{23} - \tau_{12}) \dddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{24} (\tau_{12}^2 - \tau_{12} \tau_{23} + \tau_{23}^2) \overset{iv}{\mathbf{r}}_2 + \dots \right] \quad (30.6)$$

De igual modo, multiplicando (30.4) por  $-\tau_{23}^2$ , (30.5) por  $\tau_{12}^2$  y sumando, se deduce

$$-\tau_{23}^2 \mathbf{r}_1 + (\tau_{23}^2 - \tau_{12}^2) \mathbf{r}_2 + \tau_{12}^2 \mathbf{r}_3 = \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} \left[ \ddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{6} \tau_{12} \tau_{23} \dddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{24} \tau_{12} \tau_{23} (\tau_{23} - \tau_{12}) \overset{iv}{\mathbf{r}}_2 + \dots \right] \quad (30.7)$$

Derivando dos veces las ecuaciones (30.6) Y (30.7) con respecto al tiempo, se obtienen las ecuaciones

$$\tau_{23} \ddot{\mathbf{r}}_1 - \tau_{13} \ddot{\mathbf{r}}_2 + \tau_{12} \ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{1}{2} \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} \overset{iv}{\mathbf{r}}_2 + \dots \quad (30.8)$$

$$-\tau_{23}^2 \ddot{\mathbf{r}}_1 + (\tau_{23}^2 - \tau_{12}^2) \ddot{\mathbf{r}}_2 + \tau_{12}^2 \ddot{\mathbf{r}}_3 = \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} \ddot{\mathbf{r}}_2 + \dots \quad (30.9)$$

Si sustituimos los valores de  $\overset{iv}{\mathbf{r}}_2, \ddot{\mathbf{r}}_2$ , obtenidos en (30.8) y (30.9), en la ecuación (30.7), resulta

$$\begin{aligned} \tau_{12} \tau_{23} \tau_{13} \dot{\mathbf{r}}_2 = & -\tau_{23}^2 \mathbf{r}_1 + (\tau_{23}^2 - \tau_{12}^2) \mathbf{r}_2 + \tau_{12} \mathbf{r}_3 - \\ & - \frac{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{13}}{12} [-\tau_{23} \ddot{\mathbf{r}}_1 + (\tau_{23} - \tau_{12}) \ddot{\mathbf{r}}_2 + \tau_{12} \ddot{\mathbf{r}}_3] \end{aligned} \quad (30.10)$$

bastará, pues, tener en cuenta la ecuación  $\dot{\mathbf{r}}_i = -u_i \mathbf{r}_i$ , para llegar a la fórmula fundamental

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2 + a_3 \mathbf{r}_3 \quad (30.11)$$

donde los coeficientes tienen el siguiente significado

$$a_1 = -\tau_{23} \left[ \frac{1}{\tau_{12} \tau_{13}} + \frac{u_1}{12} \right] \quad a_2 = (\tau_{23} - \tau_{12}) \left[ \frac{1}{\tau_{12} \tau_{23}} + \frac{u_2}{12} \right] \quad a_3 = \tau_{12} \left[ \frac{1}{\tau_{23} \tau_{13}} + \frac{u_3}{12} \right]$$

Es necesario tener presente que la constante  $k^2 = G(m_o + m)$  depende de la constante de Gauss y de las masas de ambos cuerpos, referidas a la del Sol como unidad, y que en este caso es  $u_i = 1/r_i^3$ .

La ecuación (30.11) lleva el nombre Herrick-Gibbs y constituye una expresión bastante más precisa que las anteriores para el cálculo del vector  $\dot{\mathbf{r}}_2$ .

## 31. CORRECCIÓN DEFINITIVA DE ÓRBITAS

Hasta ahora hemos desarrollado algunos métodos de cálculo de órbitas, basados en el número necesario de datos de observación, o en un número ligeramente superior, que nos ha permitido obtener los elementos de una órbita previa o acaso mejorada; pero, en general, se dispone de un gran número de observaciones, que deben ser coherentes con los elementos orbitales adoptados como más probables.

Por esta razón se suelen corregir los elementos previos, hasta conseguir que las diferencias entre los datos observados y los datos obtenidos como consecuencia de un cálculo de efemérides, sean minimizadas.

Como siempre o casi siempre, se impone la condición del método de mínimos cuadrados, esto es, que la suma de los cuadrados de las diferencias observación-cálculo, sea un mínimo. Sin embargo, no puede olvidarse que esta condición, en ocasiones, es poco representativa, pues dichas diferencias, además de ser lo menores posibles, han de estar bien distribuidas, combinándose alternativamente signos positivos y negativos.

Por otra parte, el número de problemas concretos que pueden presentarse es considerable, no solo por las diferentes clases de observaciones o los diferentes tipos de elementos orbitales adoptados como básicos, sino por la clase de órbitas de que se trate (pequeños planetas, cometas, satélites artificiales, satélites de planetas, estrellas dobles, etc.).

Para resumir, designemos por  $\sigma_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  un conjunto de elementos orbitales independientes y sean  $a_i (i = 1, 1, \dots, n)$  un cierto tipo de observaciones (por ejemplo, ascensiones rectas).

En general, se supone que el número  $n$  de observaciones es muy superior a seis. Además, cuanto digamos para las ascensiones rectas puede referirse a cualquier otro tipo de observaciones (por ejemplo, declinaciones, distancias, velocidades radiales, etc.).

Entonces, se tendrán  $n$  funciones del tipo

$$a_i = f(\sigma_k, t_i) \quad (31.1)$$

o bien en forma abreviada

$$a_i = f(\sigma, t_i) \quad (31.2)$$

Dados unos valores previos o aproximados  $\sigma_k^o$ , de los elementos orbitales y efectuando con éstos el correspondiente cálculo de efemérides, se obtendrán unos valores "calculados" de las observaciones, es decir

$$a_i^0 = f(\sigma_k^o, t_i) \quad (31.3)$$

Si desarrollamos en el entorno del punto  $(\sigma_k^o, t_i)$ , resultará

$$a_i = f(\sigma, t_i) = f(\sigma^o, t_i) + \sum_k \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \sigma_k + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_j \partial \sigma_k} \delta \sigma_j \Delta \sigma_k + \dots$$

donde las derivadas parciales han de ser calculadas para  $t = t_i$ ,  $\sigma_k = \sigma_k^o$

Despreciando los términos de segundo orden, resulta

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \sigma_k = f(\sigma_k, t_i) - f(\sigma_k^o, t_i) = a_i - a_i^o \quad (31.4)$$

El primer miembro de esta ecuación es una función lineal de los incrementos  $\Delta \sigma_k$ , en tanto que sus segundos miembros representan las diferencias observación-cálculo. Por consiguiente, este sistema de  $n$  ecuaciones lineales con seis incógnitas, deberá ser tratado por mínimos cuadrados para obtener dichos incrementos, con lo cual los elementos orbitales son mejorados en la forma

$$\sigma_k = \sigma_k^o + \Delta \sigma_k \quad (31.5)$$

Es fácil ver que el proceso es iterativo y que los elementos así obtenidos se pueden utilizar como datos iniciales para una nueva corrección, hasta conseguir que los incrementos  $\Delta \sigma_k$ , sean inferiores a una cantidad suficientemente pequeña dada a priori.

Así, en cada caso, el problema fundamental, aparte de la rutina propia del método de mínimos cuadrados, consiste en el cálculo de las derivadas parciales  $\partial f / \partial \sigma_k$ , que se utilizan como coeficientes de las incógnitas  $\Delta \sigma_k$ . Y aun cuando nada podemos decir de un modo general, desarrollaremos un ejemplo que sirva de referencia.

Ejemplo: Consideremos un satélite artificial  $P$  que se mueve con respecto a  $P_o$  (centro de la Tierra) en una órbita elíptica y es observado desde un punto  $O$  (Observatorio).

Haciendo como siempre  $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = P_o P$ ,  $\mathbf{R}(X_1, X_2, X_3) = O P_o$ ,  $\boldsymbol{\rho} = O P$ , tendremos

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{R} \quad (31.6)$$

Escribiendo esta fórmula en coordenadas y recordando la relación (18.8), resulta

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (31.7)$$

de ahí que, siendo los elementos de observación  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , y  $X_1, X_2, X_3$  unas constantes con respecto a los elementos orbitales  $(a, e, T, \Omega, \omega, I)$ , que representaremos por  $\sigma$  de un modo genérico, obtendremos

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \sigma} = \frac{\partial r}{\partial \sigma} u_i + r \frac{\partial u_i}{\partial \sigma} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (31.8)$$

Notemos, en primer lugar, que según las notaciones del párrafo 18, se tiene

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = v_1 \quad \frac{\partial u_2}{\partial u} = v_2 \quad \frac{\partial u_3}{\partial u} = v_3 \quad (31.9)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \Omega} = -u_2 \quad \frac{\partial u_2}{\partial \Omega} = u_1 \quad \frac{\partial u_3}{\partial \Omega} = 0 \quad (31.10)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial I} = u_3 \operatorname{sen} \Omega \quad \frac{\partial u_2}{\partial I} = -u_3 \operatorname{cos} \Omega \quad \frac{\partial u_3}{\partial I} = w_3 \operatorname{sen} u \quad (31.11)$$

Por otra parte, siendo  $u = \omega + f$ , y de acuerdo con la fórmula (31.8), será necesario calcular las derivadas parciales  $\partial r/\partial\sigma$ ,  $\partial f/\partial\sigma$ , para concluir este ejemplo.

Para ello consideremos las fórmulas fundamentales del movimiento elíptico

$$M = \frac{k}{a^{3/2}} (t - T) = E - e \operatorname{sen} E$$

$$r = a (1 - e \cos E)$$

$$\ln \operatorname{tag} \frac{f}{2} = \ln \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \ln \operatorname{tag} \frac{E}{2}$$

y derivémoslas parcialmente con respecto a  $\sigma$ . Tendremos

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \frac{\partial e}{\partial \sigma} \cos E + a e \operatorname{sen} E \frac{\partial E}{\partial \sigma} \quad (31.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen} E} \frac{\partial E}{\partial \sigma} \quad (31.13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \operatorname{sen} E \frac{\partial e}{\partial \sigma} \right) \frac{a}{r} \quad (31.14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma} = -\frac{3M}{2a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - n \frac{\partial T}{\partial \sigma} \quad (31.15)$$

Sustituyendo las expresiones (31.14), (31.15), en (31.12) y (31.13), después de tener en cuenta las igualdades

$$r \cos f = a (\cos E - e) \quad r \operatorname{sen} f = b \operatorname{sen} E$$

resulta

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \left( \frac{r}{a} - \frac{3M e \operatorname{sen} f}{2 \sqrt{1-e^2}} \right) \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos f \frac{\partial e}{\partial \sigma} - \frac{n a e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f \frac{\partial T}{\partial \sigma} \quad (31.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\frac{3M b}{2 r^2} \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \operatorname{sen} f \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \sigma} - \frac{n a b}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \quad (31.17)$$

Por tanto, siendo  $r = r(a, e, T)$  y  $u_i = u_i(\Omega, \omega, I)$ , podemos escribir

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \sigma} = u_i \left[ r_a \frac{\partial a}{\partial \sigma} + r_e \frac{\partial e}{\partial \sigma} + r_T \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + r \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial u_i}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \sigma} \right]$$

y bastará hacer  $\sigma$  igual a cualquiera de los elementos  $(a, e, T, \Omega, \omega, I)$  para obtener las derivadas parciales correspondientes.

Así, tendremos

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial a} = r_a u_i + r v_i f_a$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial e} = r_e u_i + r v_i f_e$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial T} = r_T u_i + r v_i f_T$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \Omega} = r \frac{\partial u_i}{\partial \Omega}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \omega} = r v_i$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial I} = r \frac{\partial u_i}{\partial I}$$



donde se han empleado las notaciones

$$\begin{aligned}
 r_a &= \frac{r}{a} - \frac{3 M e \operatorname{sen} f}{2 \sqrt{1-e^2}} & r_e &= -a \cos f & r_T &= -\frac{n a e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f \\
 f_a &= -\frac{3 M b}{2 r^2} & f_e &= \operatorname{sen} f \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) & f_T &= -\frac{n a b}{r^2}
 \end{aligned}$$

Los problemas de corrección de órbitas de pequeños planetas u otros cuerpos del sistema solar, se resuelven de modo análogo, aunque deba efectuarse alguna traslación suplementaria y advirtamos las diferencias de significado de  $P_o$  (el Sol),  $P$  (pequeño planeta),  $O$  (centro de la Tierra) y  $O'$  (observatorio).

Es frecuente, también, expresar el problema en coordenadas polares, por lo cual al ejemplo mencionado debemos añadir el cálculo de las derivadas parciales correspondientes.

Por ejemplo, si es

$$\xi_1 = \rho \cos \delta \cos \alpha \quad \xi_2 = \rho \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \quad \xi_3 = \rho \operatorname{sen} \delta$$

por derivación se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial \sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha & -\operatorname{sen} \delta \cos \alpha & -\cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha & \cos \delta \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \delta & \cos \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \\ \rho \frac{\partial \delta}{\partial \sigma} \\ \rho \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \quad (31.18)$$

y bastará invertir este sistema para calcular las derivadas parciales de  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ , con respecto a  $\sigma$ , en función de las derivadas parciales de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ , con respecto a  $\sigma$ , que hemos calculado en el ejemplo precedente.

## EJERCICIOS

- 1.- Un satélite artificial describe una órbita elíptica de elementos:  $a = 2 R$ ,  $e = 0,3$ ,  $I = 60^\circ$ ,  $\Omega = 30^\circ$ ,  $\omega = 30^\circ$ ,  $T = 0$ . Averiguar los instantes de paso por los nodos.
- 2.- Con los mismos elementos del problema 1, averiguar los instantes en que su declinación es máxima o mínima.
- 3.- Con los mismos elementos del problema 1 calcular las coordenadas cartesianas del satélite 65 min. después de su paso por el perigeo.
- 4.- Un asteroide se mueve en una órbita, cuyos elementos, referidos a la eclíptica, son  $\Omega = 45^\circ$ ,  $I = 30^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ . Averiguar para que valores de la anomalía verdadera hay máximos o mínimos en declinación.

# APÉNDICES

## A). Notas y comentarios del editor

### Sobre el presente documento

El presente documento es una copia en  $\text{\LaTeX}$  de unos apuntes mecanografiados realizados por Rafael Cid Palacios (véase [http://es.wikipedia.org/wiki/Rafael\\_Cid\\_Palacios](http://es.wikipedia.org/wiki/Rafael_Cid_Palacios)).

Fotocopias de estos apuntes fueron usadas como texto de referencia en la asignatura *Mecánica Celeste* impartida por José Ángel Docobo (véase [http://gl.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9\\_%C3%81ngel\\_Docobo](http://gl.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_%C3%81ngel_Docobo) en la facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela).

Se trata de un texto denso, donde los pasos meramente indicados por Cid Palacios resultan largos y tediosos si se trabajan. Documentos de apoyo, así como la última versión de este documento y sus fuentes en  $\text{\LaTeX}$  pueden encontrarse en <http://rdlazaro.info/astro-esferica-mc.html>

### Notas sobre el texto

[1] En realidad, se trata más bien de combinar linealmente las ecuaciones (multiplicaciones, sumas, ...) que de simplemente multiplicar. (página 21).

[2] Usando los valores calculados de  $u$ ,  $\dot{u}$  y  $\ddot{u}$  sólo es posible calcular  $F$  hasta el término de grado 4 y  $G$  hasta el término de grado 5. Sin embargo, Cid Palacios pone en sus apuntes expresiones para  $F$  y  $G$  que llegan a grado 6. Para justificar estos grados extras de precisión, habría que seguir calculando derivadas sucesivas de  $u$  (por encima de  $\ddot{u}$ ). (página 24).

[3] Parece ser que aquí se considera una partícula de masa unidad. ¿Cómo se justifica esto? (página 25).

[4] Para una explicación de cómo se justifica expresar la energía potencial de esta forma, ver explicación de Docobo en la página 81 de mi libreta manuscrita. (página 25).

## B). Registro de cambios

### Revisión 0.95 (Octubre 2013)

- Revisada primera parte y añadidos apéndices.
- Añadido lista de erratas detectadas en el original (sólo para la primera parte).
- Añadidas “*notas del editor*” con aclaraciones en el texto.
- Pasada codificación de archivos fuente de *latin1* a *utf8*
- Modificado archivo fuente *MetaPost* para generar las figuras con extensión `.mps`

- Generado el archivo final directamente con `pdflatex` en vez de con una combinación de `latex+dvips+ps2pdf`

## Revisión 0.90 (Primera versión con contenido completo)

- Completado el paso a  $\text{\LaTeX}$  con un aspecto similar a las fotocopias originales.

## C). Erratas detectadas en el original

### Erratas detectadas en la parte I

Pág. en fotocopias originales	Pág. en este documento	Errata detectada
8	13	En la ecuación (6.2), para el caso parabólico, donde pone “ $p$ ” debe ser “ $p = 0$ ”
11	17	En el párrafo entre las ecuaciones (10.2) y (10.3), donde pone “[...] fórmula de la velocidad (6.8)[...]” debe poner “[...] fórmula de la velocidad (6.7)[...]”.
12	17	La expresión entre las ecuaciones (10.3) y (10.3), debe ser: $\dot{r}^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2]$ , pero en el original es $\dot{r}^2 = \frac{n^2 a^4}{r^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2]$
12	18	La expresión (10.9) es: $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos f) = a(1 - e \cos E)$ , pero en el original viene como $r = a(1 - e)/(1 + e \cos f) = a(1 - e \cos E)$
16	21	En el primer párrafo de la sección 14, donde pone “[...] que satisface a las ecuaciones (4.8) y (4.10)[...]” debe poner “[...] que satisface a las ecuaciones (4.8) y (4.12)[...]”.
16	22	En el párrafo entre las ecuaciones (14.3) y (14.4), donde pone “Entonces, según (13.2), (13.3), tendremos” debe poner “Entonces, según (13.2), (13.4), tendremos”.
17	23	Aunque parece ser una mancha aparecida al fotocopiar, aclarar donde se listan las sucesivas derivadas de $\mathbf{r}$ , es $\ddot{\mathbf{r}} = -u \mathbf{r}$ , y no, como puede parecer, $\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{u} \mathbf{r}$
20	26	En la ecuación (16.12) la expresión correcta es $p_1 = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_1}$ y no, como pone el original, $p_1 = (T - V) \dot{q}_1$

### Erratas detectadas en la parte II

Parte II aún no revisada. . .